3 1761 07548290 1

HANDBOUND
AT THE

UNIVERSITY OF
TORONTO PRESS

at Al
1692

36 8069

AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER ZAHLENTHEORIE.

VORLESUNG,
GEHALTEN IM WINTERSEMESTER 1895/96
UND SOMMERSEMESTER 1896

VON

F. KLEIN.

AUSGEARBEITET VON
A. SOMMERFELD UND PH. FURTWÄNGLER.

ZWEITER, UNVERÄNDERTER ABDRUCK.

9114 2
2718108

LEIPZIG 1907.
IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER.

QA
241
K57
1907

Vorbemerkung zum Neudruck von 1907.

Indem ich die zahlentheoretischen Studien, die ich in meiner Vorlesung von 1895—96 behandelte, erneut der Öffentlichkeit unterbreite, möchte ich den Gedanken voranstellen, daß die nähere Untersuchung derjenigen Figuren, die in der Theorie der automorphen Funktionen auftreten, von selbst zahlentheoretischen Charakter annimmt, die entstehenden zahlentheoretischen Überlegungen aber dadurch, daß sie sich unmittelbar auf ein anschauliches Substrat beziehen, besonders zugänglich erscheinen.

Die solcherweise hervorkommende Verbindung von Geometrie und Zahlentheorie wird in den vorliegenden Studien an einer der einfachsten automorphen Figuren, dem Parallelgitter der Ebene, zur Geltung gebracht, wobei die Theorie der binären quadratischen Formen, einschließlich der Kompositionstheorie dieser Formen, ihre volle anschauliche Darlegung findet, insbesondere aber die Beziehung zur komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen überzeugend hervortritt. Übrigens wird diese Darlegung der Lehre von der komplexen Multiplikation als eine nicht unerwünschte Ergänzung der einschlägigen Entwickelungen in den von Fricke und mir herausgegebenen „Vorlesungen über elliptische Modulfunktionen“ angesehen werden.

Ich hoffe, daß diese ganze Darstellung, entsprechend ihrer Beschränkung auf wohlumgrenzte, relativ elementare Fragen, auch fernerhin manchem als Einleitung in höhere zahlentheoretische Studien willkommen sein wird. Ich erinnere nur daran, daß das Parallelgitter in Ebene und Raum die Grundlage auch von Minkowskis Geometrie der Zahlen bildet, und möchte andererseits der Überzeugung Ausdruck geben, daß ein Verfolg der von mir gegebenen Auffassung der Kompositionstheorie einen bequemen Zugang zu der modernen Theorie der algebraischen Zahlkörper liefert.

GÖTTINGEN, 25. Jan. 1907. KLEIN.

HEFT I.

AUSGEARBEITET VON A. SOMMERFELD.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung. Seite

Die Punktgitter in der Ebene 1
Arithmetische Darlegung des Euklidischen Algorithmus bezw. der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung 9
Zugehörige geometrische Interpretation 17
Entwickelung rationaler Brüche, Erzeugung aller unimodularen Substitutionen durch S und T, bezw. S und S' 25
Der Satz von Lagrange über die relativen Minima der Linearformen . . . 39

I. Hauptteil: Die Reduktionstheorie der einzelnen binären quadratischen Form.

1. Geometrische Vorbegriffe.

Das System der Geometrie 50
Die Pseudometrik, der elliptische Fall 57
Der hyperbolische und der parabolische Fall 71
Bedeutung des Problems der zahlentheoretischen Äquivalenz zweier binärer quadratischer Formen 82

2. Die Reduktionstheorie im parabolischen Falle 93

3. Die Reduktionstheorie im hyperbolischen Falle.

Die Einführung der natürlichen Umrißpolygone, Definition der reduzierten Formen 103
Serien zusammengehöriger reduzierter Formen 113
Arithmetische Bestimmungen hierfür 120
Die ganzzahligen Formen, insbesondere ihre regulären Automorphieen . . . 128
Beziehungen zur Pellschen Gleichung, der Pellsche Winkel 141
Ganzzahlige Formen derselben Diskriminante, Endlichkeit der Klassenzahl 149
Zahlenbeispiel D = 40 152

4. Die Reduktionstheorie im elliptischen Falle 165

II. Hauptteil: Die Reduktionstheorie in ihrer Wirkung auf die Gesamtheit der binären quadratischen Formen.

1. Allgemeiner Ansatz.

Seite

Die Koeffizientenverhältnisse a:b:c als trimetrische Koordinaten in der Ebene 173
Der fundamentale Kegelschnitt und seine Parameterdarstellung 179

2. Die definiten quadratischen Formen und die Punkte im Inneren des Kegelschnitts.

Abgrenzung des reduzierten Raumes 183
Rationale Punkte auf dem Kegelschnitt und das Hilfsmittel der harmonischen Konstruktion 186
Fortschreitende Konstruktion neuer Dreiecke von dem Dreiecke $0 \leqq x \leqq 1$ aus 192
Algorithmus für die Parameterwerte der sukzessiven Dreiecksecken 196
Beziehungen zur Kettenbruchentwickelung der rationalen Brüche. Definition der Elementarsehnen erster und zweiter Art 201
Der Fundamentalbereich (Diskontinuitätsbereich) der Gruppe $(\alpha\delta - \beta\gamma) = +1$ 207
Verschärfungen für den Rand des Fundamentalbereichs; Formen mit außergewöhnlichen Automorphieen 214
Der Fundamentalbereich der erweiterten Gruppe $(\alpha\delta - \beta\gamma) = \pm 1$: die formae ancipites 222
Vergleich der neuen Theorie mit den früheren Parallelgittern 232

3. Die Formen mit D = 0 und die Punkte auf dem Kegelschnitt.

Äquivalente Punkte auf dem Kegelschnitt liegen überall dicht 238

4. Die indefiniten Formen mit $D > 0$ und die Punkte außerhalb des Kegelschnitts.

Der reduzierte Punktraum 244
Das Hermitesche Prinzip: Der Punkt wird durch seine Polarsehne ersetzt 248
Die Polarsehnen der reduzierten Formen 251
Kette von Elementarsehnen erster Art, zu einer Polarsehne gehörig 257
Zusammenhang mit der früheren Reduktionstheorie der Formen f 261
Die Automorphieen unserer Formen 267
Die Bedeutung der gewöhnlichen Automorphieen bei Zugrundelegung der Cayleyschen Maßbestimmung 271
Entsprechende Charakterisierung der anderen Automorphieen 283
Die spezifische Schwierigkeit der Theorie 290

Anhang: Vorläufiges über elliptische Funktionen und deren Zusammenhang mit der Theorie der definiten quadratischen Formen.

Seite

Die Parallelgitter als gemeinsame Grundlage der beiden Theorieen 295

Eine erste Definition der elliptischen Funktionen (Voranstellung der p (u), p′ (u), g_2, g_3) 302

Verhalten der so definierten Funktionen in dem Periodenparallelogramm der u-Ebene 309

Einteilung der ω-Ebene in Kreisbogendreiecke 313

Das Verhalten der Modulfunktionen im einzelnen Fundamentalbereich der ω-Ebene 331

Die reelle ω-Axe als Ort gehäufter Singularitäten 337

Aufsteigen zu den Modulformen 340

Die elliptischen Modulfunktionen als analytische Invarianten unserer zahlentheoretischen Gebilde 352

Weiterführung der elliptischen Theorie: Das allgemeine Programm der „Modulfunktionen“ 356

Nähere Angaben über die niedersten Stufenzahlen 365

Noch weitergehende Verallgemeinerungen . . . . . 384—391

HEFT II.

AUSGEARBEITET VON A. SOMMERFELD UND PH. FURTWÄNGLER.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung.

Die allgemeine Fragestellung betr. singuläre elliptische Gebilde 1
Bemerkungen über Moduln höherer Stufe und die zugehörige Definition der relativen Äquivalenz quadratischer Formen 6
Von der Kroneckerschen Grenzformel 14

I. Hauptteil: Von der Transformation höherer Ordnung der elliptischen Funktionen.

1. Die Transformation bei der Gitterfigur.

Das allgemeine Problem der eingelagerten Gitterzahl und Auswahl der Repräsentanten 18
Zusammenfassung der ganzzahligen Gitter mit gemeinsamer Stammdiskriminante (die h Stämme und ihre Zweige) 32

2. Die Transformation der Größen erster Stufe.

Die Transformationsgleichung F (J', J) = 0 auf Grund des Fundamentalpolygons 34
Einführung von j = 1728 J. Besondere Eigenschaften von F (j', j) = 0. . 48
Überleitung zur Multiplikatorgleichung erster Stufe 61

3. Die Transformation von Größen höherer Stufe.

Allgemeine Erläuterungen, insbesondere betreffend die Ikosaederirrationalität ζ 73
Einiges über die Transformationstheorie des ζ (die Hauptgleichung und die 59 Nebengleichungen) 79

II. Hauptteil: Von der Komposition der zu derselben Diskriminante gehörigen ganzzahligen Gitter (insbes. für Stammdiskriminanten).

1. Elementare Konstruktionen.

Seite

Verabredungen beim Hauptgitter; die Gitterzahlen als ganze Zahlen des Körpers $\sqrt{d}$ 94
Vorläufiges über Nebengitter: Konjugierte Lage konjugierter Gitter . . . 108
Orientierung der Ancepsgitter 114

2. Komposition der Gitter (speziell der Stammgitter).

Definitionen 118
Allgemeiner Satz über die Komposition zweier Stammgitter 123
Die Arndtschen Formeln 129
Komposition der Formen; Korollar der Gitterkomposition 131
Spezielle Fälle 134
Die h Stammgitter als eine Gruppe vertauschbarer Elemente 143
Zahlenbeispiele 150
Die Normalfigur der h orientierten Gitter 157

3. Die Teilbarkeitsgesetze im Gebiete der orientierten Gitterzahlen.

Der allgemeine Ansatz: Einheiten und Primzahlen 172
Die Grundoperationen im Gebiete der Gitterzahlen 176
Beziehungen zu Dedekinds Idealtheorie; Bildgitter 180
Beziehung zwischen den Gitterzahlen und ihren Bildgittern 184
Vergleich der Dedekindschen Definition der Idealgitter mit der unsrigen . 189
Verallgemeinerung der Idealtheorie (Nebengitterideale) 193
Gleichwertigkeit der Gitterzahlen und der entsprechenden Idealgitter bezüglich der Teilbarkeit 198
Algorithmus zur Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers zweier Gitterzahlen 200
Die einfachen Gesetze der Faktorenzerlegung 206
Allgemeine Aufzählung der vorhandenen Primfaktoren 209

4. Andeutung über die Zweiggitter 221

III. Hauptteil: Von den singulären elliptischen Gebilden.

1. Einleitung.

Seite

Bezeichnungen 222
Der Fundamentalsatz betr. die Übereinstimmung gewisser transformierter Gitter mit den Idealgittern 225

2. Die singulären j.

Die Bedeutung des Fundamentalsatzes für die Wurzeln der Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ und die zugehörige Multiplikatorgleichung . . . 229
Bestätigungen im Falle $d = -3$ 237
Von den Transformationen n^{ter} Ordnung, welche $j' = j$ liefern 250
Die Funktion $j' - j$ auf der zugehörigen Riemannschen Fläche und die Klassenzahlrelation erster Stufe 262
Die Herstellung der Klassengleichung $\chi(j) = 0$ 276
Die Klassengleichung als Abelsche Gleichung im Bereiche $\sqrt{-a}$ 285
Andeutungen über den Klassenkörper (erster Stufe) 306

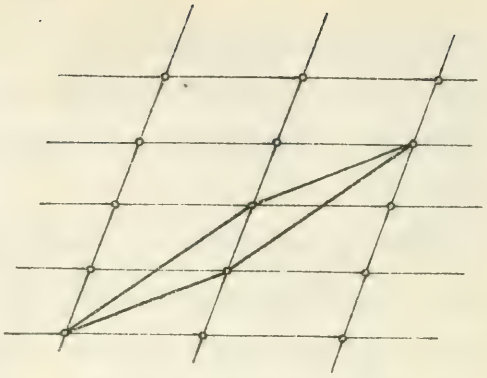
3. Die singulären Werte der Ikosaederirrationalität.

Erneute Betrachtung der zum Ikosaeder gehörigen Transformationsgleichungen 315
Die Gleichungen $f\left|\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right|(\zeta', \zeta) = 0$ und $\Psi\left|\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right|(r_E) = 0$ 319
Die Klassengleichungen fünfter Stufe 349
Schlußbemerkung 353

Absicht dieser Vorlesung ist es, die Theorie der binären quadratischen Formen in geometrischem Gewande zu entwickeln. Dabei wünschen wir nicht, für unsere geometrische Auffassung der Theorie den prinzipiellen Vorrang gegenüber einer rein arithmetischen Behandlung in Anspruch zu nehmen. Unsere Meinung ist es vielmehr, daß anschauliches Erfassen und logische Behandlungsweise der Mathematik sich nicht ausschliessen, sondern gegenseitig unterstützen sollen. In diesem Sinne werden wir in dem parallel laufenden Seminar dieselbe Theorie, unter wesentlicherer Mitwirkung von Hilbert mehr von ihrer

arithmetischen Seite her studiren.

Indem wir uns sogleich in medias res versetzen, schreiben wir den allgemeinen Ausdruck einer binären quadratischen Form folgendermassen an: $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Für die Zwecke der Zahlentheorie sind die Veränderlichen x und y (ebenso wie die Coefficienten a, b, c) ganze Zahlen. Wir werden also bei geometrischer Auffassung dazu geführt in der x, y-Ebene die ganzzahligen Punkte zu markiren. Wir legen irgend ein System von Parallelcoordinaten zu Grunde, dasselbe braucht nicht gerade rechtwinklig zu sein, auch kann der Maassstab, mit dem wir auf der x- und y-Axe messen, verschieden sein. Durch die Punkte $x = 1, 2, 3 \ldots$ der x-Axe, bezw. die Punkte $y = 1, 2, 3 \ldots$ der y-Axe ziehen wir Parallelen zu den Coordinatenaxen und erhalten die Figur eines Parallelgitters. Die Eckpunkte desselben, die „Gitterpunkte", liefern uns die ganzzahligen Punkte der Ebene. Wenn wir unsere Aufmerksamkeit nur auf diese richten und von den verbindenden Graden absehen, sprechen wir von einem Punktgitter.



Eine erste Frage, die wir zu erledigen haben, ist diese: Auf wie viel Arten ist es möglich, ein Punktgitter als Parallelgitter aufzufassen?

Wir denken uns die beiden durch den Nullpunkt verlaufenden Geraden eines erwenen Parallelgitters als Axen eines neuen x', y' Systems und wählen als Maasseinheit auf den neuen Axen die Entfernung des auf der betr. Axe gelegenen nächsten Punktes vom Nullpunkte. Sollen beide Parallelgitter, das neue und das alte, zu demselben Punktgitter gehören, so müssen den sämmtlichen ganzzahligen Punkten des x, y - Systemes ganzzahlige Punkte im x', y'-System entsprechen und umgekehrt. Wir können daher unsere ursprüngliche Aufgabe analytisch folgendermassen aussprechen:

Es sollen alle möglichen Transformationsformeln:

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

von der Beschaffenheit aufgesucht werden, dass zu ganzzahligen Werten von x, y ganzzahlige Werte x', y' gehören und umgekehrt.

Unter den Coordinatentransformationen der vorstehenden Form nimmt der Fall $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ eine Ausnahmestellung ein. Wir schliessen denselben hier aus. Im Übrigen unterscheiden wir die Transformation als gleichstimmig oder ungleichstimmig, je nachdem $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ oder $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$ ist. Im ersteren Falle ist der Sinn der Drehung, durch welche die positive x-Axe in die positive y-Axe, bez. die positive x'-Axe in die positive y-Axe auf dem kürzesten Wege übergeführt wird, derselbe, im zweiten Falle der entgegengesetzte.

Aus der Bedingung, dass den ganzzahligen Punkten x', y' ganzzahlige Punkte x, y entsprechen sollen, folgt zunächst, indem wir $x' = 1, y' = 0$ bez. $x' = 0, y' = 1$ nehmen, dass die Substitutionscoefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen sein müssen. Sodann lösen wir nach x' und y' auf:

$$x' = \frac{\delta x - \beta y}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad y' = \frac{-\gamma x + \alpha y}{\alpha\delta - \beta\gamma};$$

aus der Bedingung, dass auch den ganzzahligen Werten x, y ganzzahlige Werte x', y' entsprechen sollen, folgt in derselben Weise, dass auch die folgenden Grössen

$$\frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad \frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \ldots$$

bez. ganzen Zahlen (a, b, c, d) gleich sein müssen.

Wir haben also die Gl:

$$\begin{aligned} \alpha &= a(\alpha\delta - \beta\gamma), \\ \beta &= b(\alpha\delta - \beta\gamma), \\ \gamma &= c(\alpha\delta - \beta\gamma), \\ \delta &= d(\alpha\delta - \beta\gamma), \end{aligned}$$

aus denen sich durch geeignete Multiplication ergiebt:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

oder

$$1 = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Da die rechts stehenden Factoren ganze Zahlen sind, müssen sie beide entweder gleich $+1$ oder gleich -1 sein. Wir gewinnen also das Resultat: <u>Die Determinante unserer Transformation $\alpha\delta - \beta\gamma$ muss gleich $\pm$ sein.</u> Umgekehrt sieht man, dass dann wirklich unsere Transformation die verlangten Eigen-

schaften besitzt.

Fr. d. 25. X. Die Determinante $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ hat eine einfache geometrische Bedeutung. Construiren wir uns das „Fundamentalparallelogramm" des transformirten Gitters, in dem wir die Verbindungsstrecken des Nullpunktes mit den Punkten $x' = 1, y' = 0$ und $x' = 0, y' = 1$ zu einem Parallelogramm vervollständigen. Die letzteren haben im x, y - Systeme die Coordinaten $x = \alpha, y = \gamma$ bez. $x = \beta, y = \delta$. Der Inhalt des transformirten Fundamentalparallelogramms ist also gerade gleich der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$, vorausgesetzt, dass wir den Inhalt des ursprünglichen Elementarparallelogramms = 1 setzen. Mithin sagt die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ aus, dass der Flächeninhalt des neuen Elementarparallelogramms gleich 1, d. h. ebenso gross, wie der des alten ist. In dieser geometrischen Fassung ist der Satz, dass bei unserer Fragestellung $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ wird, eigentlich selbstverständlich, wie die folgende Betrachtung zeigt, die wir hier nur im allgemei-

neu Umriss skizzieren. Die Anzahl der Elementarparallelogramme ist ebenso gross, wie die Anzahl der Gitterpunkte; denn wir können jedem Gitterpunkte ein umstossendes Parallelogramm zuordnen und umgekehrt. Die Anzahl der Gitterpunkte, also auch die der Elementarparallelogramme ist hiernach in beiden Gittern dieselbe. Wir teilen nun durch die beiden Gitter dieselbe Grösse (nämlich den Inhalt der ganzen Ebene) in dieselbe Anzahl unter sich gleicher Teile (einzelner Parallelogramme) ein. Mithin werden diese Teile bei beiden Einteilungen gleich gross ausfallen. - Diese Überlegung kann und muss natürlich präzisirt werden, wie solches im Seminar geschehen wird.

Die Frage nach den möglichen Parallelgittern führte uns auf die Untersuchung der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. Ohne Weiteres zeigt sich, dass α und γ, ebenso β und δ etc. <u>relativ prim</u> gewählt werden müssen. Ersteres heisst geometrisch, dass die erste Seite

neuen Fundamentalparallelogramms im Innern keine Gitterpunkte enthalten darf. Dies vorausgesetzt, wollen wir zeigen, dass man zu beliebig gegebenem α und γ allemal Zahlen β und δ (u. s. w. unendlich viele Zahlen) finden kann, welche unserer Gleichung genügen, oder anders ausgedrückt, dass man zu einer beliebig im Gitter gezogenen ersten Strecke, welche in ihrem Innern keinen Gitterpunkt trägt, eine zweite so bestimmen kann, dass das entstehende Parallelogramm den Flächeninhalt 1 hat.

Zunächst zeigt sich, dass, wenn ein solches Zahlenpaar (β', δ') gefunden ist, sogleich unendlich viele (und damit überhaupt alle existirenden) angegeben werden können. Sei nämlich

$$\alpha\delta' - \beta'\gamma = 1.$$

Wir subtrahiren davon die Gl. $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ und finden als Bedingung für β und δ die Gl.

$$\alpha(\delta - \delta') = \gamma(\beta - \beta').$$

Da α und γ als relativ prim vorausge-

setzt werden, so muß, unter m eine ganze Zahl verstanden, jede Lösung unserer Gl. die Form haben:

$$\beta - \beta' = m\alpha \,, \quad \delta - \delta' = m\gamma$$

oder

$$\beta = \beta' + m\alpha \,, \quad \delta = \delta' + m\gamma$$

Dieser Schluß beruht wesentlich auf den elementaren Teilbarkeitsgesetzen der ganzen Zahlen. Umgekehrt erkennt man, daß die vorstehenden Werte von β und δ bei beliebigem m unserer Gleichung genügen. Wir haben also die allgemeinste Lösung der vorliegenden „Diophantischen Gleichung ersten Grades" aus einer speziellen Lösung abgeleitet.

Um eine einzelne Lösung β', δ' zu finden, dazu dient uns der Euklidische Algorithmus: Derselbe hat zunächst den Zweck, den grössten gemeinsamen Teiler zweier gegebener Zahlen a_1 und a_2 zu berechnen. Wir setzen an:

$$a_1 = \mu_1 a_2 + a_3$$
$$a_2 = \mu_2 a_3 + a_4$$
$$a_3 = \mu_3 a_4 + a_5$$
$$- - - - - - - - - -$$

Hier sind $a_3, a_4 \ldots, \mu_1, \mu_2 \ldots$ lauter positive ganze Zahlen, von denen wir die letzteren jedesmal so gross wie möglich wählen. Wir machen nun den specifisch zahlentheoretischen Schluss, dass in der Reihe der abnehmenden Zahlen $a_3, a_4 \ldots$ schliesslich die Null auftreten muss, dass also das Euklidische Verfahren abbricht. Die letzten Gleichungen mögen lauten:

$$\mu_{n-2} = \mu_{n-2} \cdot a_{n-1} + a_n,$$
$$a_{n-1} = \mu_{n-1} \cdot a_n.$$

Indem wir diese Gleichungen einmal von vorwärts nach rückwärts und einmal von rückwärts nach vorwärts lesen, erkennen wir, dass a_n der grösste gemeinsame Teiler von a_1 und a_2 ist. In dem besonderen Fall, wo a_1 und a_2 relativ prim sind, muss $a_n = \pm 1$ sein.

Wir brauchen den Euklidischen Algorithmus nur etwas umzuordnen, um zu der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung des Quotienten a_1 / a_2 zu gelangen:

Es wird: $$\frac{a_1}{a_2} = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cfrac{1}{\mu_3 + \ldots + \cfrac{1}{\mu_{n-1}}}}$$

Um anzudeuten, daß die Kettenbruchentwicklung auch auf irrationale Zahlen ausgedehnt werden kann, schreiben wir ω an Stelle von a_1/a_2 und setzen die folgenden Gleichungen an:

$$\omega = \mu_1 + r_1$$

$$\frac{1}{r_1} = \omega_1 = \mu_2 + r_2 \qquad \omega = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \frac{1}{\mu_3 + \dots}}$$

$$\frac{1}{r_2} = \omega_2 = \mu_3 + r_3$$

Hier bedeuten die $\mu_1, \mu_2 \dots$ wieder ganze Zahlen, die $r_1, r_2 \dots$ positive echte Brüche; die ersteren bezeichnet man als <u>Teilnenner</u>, die letzteren wollen wir <u>Teilreste</u> nennen. Brechen wir den Kettenbruch an einer beliebigen Stelle ab, so erhalten wir einen "<u>Näherungswert</u>" für die Zahl ω. Die Näherungswerte sind rationale Brüche von der Form $\frac{p}{q}$. Wir haben

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{\mu_1}{1}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{\mu_1 \mu_2 + 1}{\mu_2}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{\mu_1 (\mu_2 + \frac{1}{\mu_3}) + 1}{\mu_2 + \frac{1}{\mu_3}} = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 + \mu_3}{\mu_2 \mu_3 + 1} \text{ etc.}$$

Von den Näherungsbrüchen gehen wir zu <u>Näherungspaaren</u> über, indem wir

die ersteren je in einen Zähler und Nenner spalten, die relativ prim zu einander sind. Die ersten Näherungspaare werden sein.

$$p_1 = a_1 \qquad q_1 = 1$$

$$p_2 = a_1 \cdot a_2 + 1, \quad q_2 = a_2$$

Die Reihe der Näherungspaare setzen wir noch nach rückwärts in geeigneter Weise fort, indem wir definiren:

$$p_0 = 0 \quad , \quad q_0 = 0$$

$$p_{-1} = 0 \quad , \quad q_{-1} = \frac{1}{x}.$$

D. d. 2.1. Zwischen den auf einander folgenden Näherungsbrüchen besteht nun die folgende einfache Recursionsformel:

$$1) \quad \frac{p_r}{q_r} = \frac{a_r \cdot p_{r-1} + p_{r-2}}{a_r \cdot q_{r-1} + q_{r-2}}$$

Wir beweisen dieselbe durch vollständige Induction, nehmen also an, dass dieselbe Formel für den $(r-1)^{ten}$ Näherungsbruch richtig sei, dass also:

$$\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}} = \frac{a_{r-1} \cdot p_{r-2} + p_{r-3}}{a_{r-1} \cdot q_{r-2} + q_{r-3}} \text{ sei.}$$

Nun entsteht doch der $(r-1)^{te}$ Näherungsbruch wenn wir den Kettenbruch mit der Zahl a_{r-1}, der r^{te}, wenn wir ihn mit der Zahl a_r abbrechen.

Der r^{te} Näherungsbruch, können wir auch sagen, entsteht aus dem $(r-1)^{ten}$, wenn wir u_{r-1} durch $u_{r-1} + \frac{1}{u_r}$ ersetzen.

Thun wir dieses in der Formel für $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$, so ergiebt sich, da $p_{r-2}, q_{r-2}, p_{r-3}, q_{r-3}$ die Zahl u_{r-1} nicht enthalten:

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{(u_{r-1} + \frac{1}{u_r})\, p_{r-2} + p_{r-3}}{(u_{r-1} + \frac{1}{u_r})\, q_{r-2} + q_{r-3}} = \frac{u_r\, p_{r-1} + p_{r-2}}{u_r\, q_{r-1} + q_{r-2}}$$

Berücksichtigt man noch, dass die Formel 1) für $r = 1$ richtig ist, so ist sie damit für jedes r bewiesen.

Wir zeigen ferner, dass die Recursionsformel nicht nur für die Näherungswerthe, sondern auch für die Näherungspaare besteht, dass also:

$$2.) \quad \begin{aligned} p_r &= u_r\, p_{r-1} + p_{r-2} \\ q_r &= u_r\, q_{r-1} + q_{r-2} \end{aligned}$$

Letzteres wird dann zutreffen, wenn die rechten Seiten von 2) relativ prim sind. Wir bezeichnen dieselben vorläufig mit p_r', q_r' und haben dann:

$$(p_r' \cdot q_{r-1} - q_r' \cdot p_{r-1}) = -(p_{r-1} \cdot q_{r-2} - q_{r-1} \cdot p_{r-2})$$

Durch die wiederholte Ausführung

derselben Rechnung folgt

$(p_r' \cdot q_{r-1} - q_r' \cdot p_{r-1}) = (-1)^r (p_0 \cdot q_{-1} - q_0 \cdot p_{-1}) = (-1)^r$

p_r' und q_r' können also keinen gemeinsamen Teiler haben; es ist daher wirklich $p_r = p_r'$, $q_r = q_r'$ und die Formel 2) ist bewiesen.

Die gleichzeitig bewiesene Relation:

3) $p_r \cdot q_{r-1} - q_r \cdot p_{r-1} = (-1)^r$

wird als <u>Determinantensatz der Kettenbrüche</u> bezeichnet.

Nach 2) ergiebt sich p_r aus p_{r-2} durch a_r - malige Hinzufügung von p_{r-1} etc. Bei diesem Verfahren liegt es nahe, zwischen das $r-2^{te}$ und r^{te} Näherungspaar noch die folgenden Zahlenpaare einzuschalten:

$$2') \quad \begin{matrix} \varsigma p_{r-1} + p_{r-2} \\ \varsigma q_{r-1} + q_{r-2} \end{matrix} \quad (\varsigma = 1, 2, \cdots (a_r - 1)),$$

welche man offenbar auch so schreiben kann:

$$2') \quad \begin{matrix} p_r - \sigma p_{r-1} \\ q_r - \sigma q_{r-1} \end{matrix} \quad (\sigma = 1, 2, \cdots (a_r - 1)).$$

Diese bezeichnen wir als <u>Nebennäherungspaare</u>, die früheren im Gegensatze dazu

auch als Hauptnäherungspaare.
Endlich drücken wir noch die zu entwickelnde Größe w selbst recurrent mit Benutzung der Teilreste r_r aus. Es war ja

$$w = u_1 + \frac{1}{u_2 + \dots \frac{1}{u_r + r_r}}.$$

w entsteht also aus $\frac{p_r}{q_r}$, wenn wir hier $u_r + r_r$ statt u_r einträgen; mithin haben wir

$$4) \quad w = \frac{p_r + r_r\, p_{r-1}}{q_r + r_r\, q_{r-1}}.$$

Wir benutzen diese Formel, um uns ein Urteil über die Abweichung des $r$ten Näherungsbruches von w_r zu verschaffen. Wir haben:

$$5) \quad w - \frac{p_r}{q_r} = \frac{r_r (-1)^{r-1}}{q_r (q_r + r_r\, q_{r-1})}$$

Die Abweichung wird immer kleiner, je weiter wir in der Reihe der Näherungsbrüche vorwärts gehen, denn der Nenner wächst mit wachsendem r, während der Zähler ein echter Bruch ist. Vor Allem aber sehen wir: Die aufeinander folgenden Näherungsbrüche sind abwechselnd größ-

der und Kleiner als w; genauer gesagt, sind die Näherungsbrüche gerader Ordnung größer, die ungerader Ordnung kleiner als w.

Nach diesen Entwickelungen kommen wir auf unseren Ausgangspunkt, nämlich auf die Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

zurück. hier waren α und γ gegebene relativ prime Zahlen; β und δ sollte gefunden werden. Zu dem Zwecke entwickeln wir $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einen Kettenbruch, derselbe bricht an einer gewissen Stelle (der n^{ten}) ab, so daß

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{p_n}{q_n}$$

Da Zähler und Nenner auf beiden Seiten dieser Gleichung relativ prim sind, haben wir auch

$$\alpha = p_n \,, \quad \gamma = q_n \,.$$

Nehmen wir noch das vorletzte Näherungspaar p_{n-1}, q_{n-1} hinzu, so gilt nach 3) die Gleichung:

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$$

Daher erhalten wir eine Lösung unserer

Gleichung, indem wir setzen

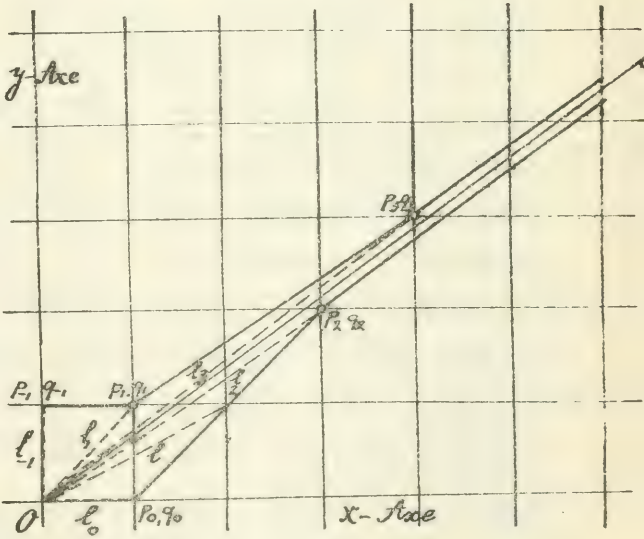
$$\beta = (-1)^n p_{n-1}\,, \quad \delta = (-1)^n q_{n-1}$$

Die Kettenbruchentwicklung liefert uns also in ihrem vorletzten Näherungspaar (v. bis auf das Vorzeichen) die gesuchte Lösung der Diophantischen Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Der Tendenz dieser Vorlesung entsprechend fragen wir uns: was bedeuten alle diese Dinge geometrisch? Wir gewinnen dadurch ein lebhafteres Bild, als es die abstracten Formeln geben können.

Wir ziehen in unserem Gitter die Gerade $w = \frac{x}{y}$ u. markieren die Näherungspunkte von w, d. h. die Gitterpunkte mit den Coordinaten p_r, q_r. Von den Hauptnäherungspunkten liegen nach



Gleichung 5) diejenigen mit geradem Index auf der Rechten, die mit ungeradem auf der Linken der ω - Geraden. Desgleichen liegen die Nebennäherungspunkte, welche zwischen zwei Hauptnäherungspunkten mit geradem Index eingeschaltet sind, auf der rechten, die anderen auf der linken Seite.

Wir verbinden jeden der Näherungspunkte mit dem Nullpunkte O. Die Verbindungsstrecke des r^{ten} Näherungspunktes heisse l_r. Speciell sind l_{-1} und l_0 zwei auf der x- resp. y - Axe aufgetragene Strecken von der Länge 1. Jeder Strecke l_r kommt eine gewisse Richtung und Grösse zu. Es ist nun namentlich von der Mechanik her bekannt, dass man mit Strecken eine Operation vornehmen kann, welche man passend als Addition bezeichnet. Zwei Strecken addiren heisst: Den Anfangspunkt der einen an den Endpunkt der anderen ansetzen. Das Resultat der Addition ist die vom Anfangspunkte dieser nach dem Endpunkte jener

gezogene Verbindungsstrecke. Der moderne Name für Streckenrechnung ist Vectoranalysis.

Frei. d. 1. XI. Auf diese Streckenrechnung weisen uns unsere Recursionsformeln hin. Wir behaupten: es entsteht der Vector l_r des r^{ten} Hauptnäherungspunktes aus dem Vector l_{r-2}, wenn wir zu diesem den Vector l_{r-1} μ_r - mal addiren, und: es entsteht der Vector l eines Nebennäherungspunktes, wenn wir zu l_{r-2} den Vector l_{r-1} ϱ - mal addiren. Oder in den Symbolen der Streckenrechnung ausgedrückt:

$$l_r = l_{r-2} + \mu_r l_{r-1} \quad \text{bez.}$$
$$l = l_{r-2} + \varrho l_{r-1}.$$

In der That sind diese Gleichungen nichts anderes als unsere früheren Gleichungen 2) und 2'). Spalten wir sie nämlich in „Componenten" d. h. projiciren wir die Strecken auf die x- und y- Axe, so ergeben sich gerade jene Recursionsformeln. Wir wollen auch der Geraden w einen Vector (L) zuordnen, welcher der Gl (4) entsprechend gegeben ist durch

4') $L = l_r + r_r\, l_{r-1}$.

Nun können wir die Reihe der successiven Näherungspunkte nach folgender Regel geometrisch bestimmen. Wir beginnen in dem Punkte p_{-1}, q_{-1} und setzen an diesen die Strecke l_0 a_1-mal an. Wir kommen dadurch zu p_1, q_1; die Verbindungsstrecke von 0 nach p_1, q_1 ist l_1. Dann gehen wir zum Punkte p_0, q_0 über und tragen an diesen die Strecke l_1 a_2-mal an, wodurch wir nach p_2, q_2 gelangen. Die Strecke von 0 nach p_2, q_2 heisst l_2. Jetzt tragen wir an p_1, q_1 a_3-mal die Strecke l_2 ab u. s. f. Jedesmal ziehen wir die Geraden, welche von dem r^{ten} nach dem $(r+2)^{\text{ten}}$ Näherungspunkte führen, aus. Zusammen bilden sie zwei Polygonzüge, einen rechten und einen linken. Die Ecken derselben sind die Hauptnäherungspunkte. Die Nebennäherungspunkte aber sind einfach die sonstigen auf den Polygonzügen gelegenen Gitterpunkte. Betrachten wir nämlich die Polygonseite, welche von p_{r-2}, q_{r-2} nach p_r, q_r hinführt. Dieselbe läuft der

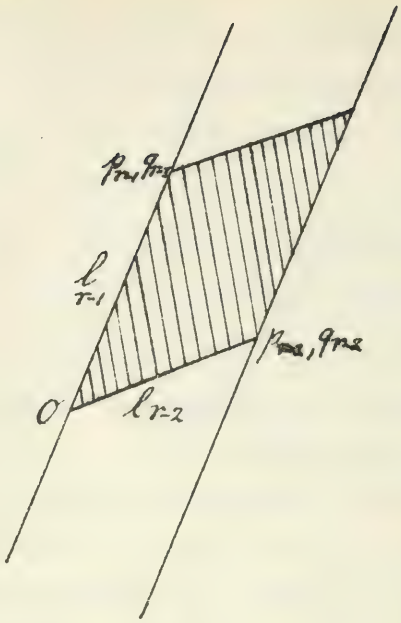
Strecke l_{r-1} parallel. Die Strecke l_{r-1} selbst enthält in ihrem Innern keinen Gitterpunkt. Es bedeutet dieses nichts Anderes, als wenn wir oben sagten: Die Zahlen p_{r-1}, q_{r-1} sind relativ prim. Desgleichen können wir bei einmaligem Abtragen von l_{r-1} an p_{r-2}, q_{r-2} keinen Gitterpunkt treffen. Wohl aber ist der Endpunkt der abgetragenen Strecke ein Gitterpunkt u. zw. der erste zwischen dem $(r-2)^{ten}$ und r^{ten} Hauptnäherungspunkt eingeschaltete Nebennäherungspunkt. Indem wir so fortfahren, sehen wir, daß auf unserer Polygonseite im Ganzen a_{r-1} Gitterpunkte liegen, und daß dieses gerade die a_{r-1} zwischen $(r-2)$ und (r) eingeschalteten Nebennäherungspunkte sind.

Die Zahlen a_r haben wir bisher stillschweigend aus der Rechnung übernommen. Es erübrigt noch, auch die selbe geometrisch zu bestimmen. Dies gelingt, wenn wir die v-Linie, welche sich zwischen unsern Polygonzügen hindurchzieht, berücksichtigen.

Die Gleichung 4') zeigt, daß, wenn wir von p_{r-2}, q_{r-2} den Vector l_{r-1}, statt μ_r - mal $(\mu_r + 1)$ mal antragen, wir die w- Linie passiren würden. In der That dürfen wir nach jener Gleichung an l_r nur einen Bruchteil (r_r) von l_{r-1} ansetzen, um in einen Punkt von w zu gelangen. Mithin bedeutet μ_r das größte Multiplum von l_{r-1}, welches sich zum Punkte $(r-2)$ addiren darf, ohne die w- Gerade zu treffen. Dieses die geometrische Definition der Zahlen μ_r!

Unsere Beschreibung der Polygonzüge ist aber bisher noch recurrent und daher nicht sehr übersichtlich. Wir erhalten sie mit einem Schlage, wenn wir folgende Betrachtungen anstellen, bei denen wir uns w zuförderst als irrationale Größe denken, so daß die beiden Polygonzüge auf den beiden Seiten der w Linie in's Unendliche laufen. Das Parallelogramm, welches O zu einer Ecke und l_{r-2}, l_{r-1} zu Seiten hat, ist ein <u>Elementarparallelogramm</u>; der Flächeninhalt desselben beträgt

nämlich ± 1 / nach dem Determinantensatze der Kettenbrüche (s. Gl 3)) und seine Ecken sind Gitterpunkte. Dasselbe kann in seinem Innern keinen Gitterpunkt enthalten, sonst könnten wir nämlich nicht, wie es nach der Definition der Elementarparallelogramme möglich sein muß, durch Verschiebung desselben ein Parallelgitter erhalten, welches sämmtliche Gitterpunkte der Ebene zu Eckpunkten hat. Aus unserem Elementarparallelogramm erhalten wir nun durch fortgesetzte Aneinanderreihung congruenter Parallelogramme (vergl. die Figur) einen „Elementarstreifen". Dieser kann ebenso wenig wie das einzelne Parallelogramm einen Gitterpunkt im Innern



enthalten. Nun fassen wir den in der vorhergehenden Figur von unserm bei den Polygonzügen eingeschlossenen Raum in's Auge. Dieser lässt sich in einzelne (übrigens wechselweise übereinander greifende) Stücke von Elementarstreifen zerlegen. Daher findet sich auch zwischen unseren Polygonzügen kein einziger Gitterpunkt.

Nun zerlegt unsere w-Gerade die Gitterpunkte des Quadranten zwischen der positiven x- und y- Axe in zwei Klassen, in solche, welche links, und solche, welche rechts von der w-Geraden liegen. Betrachten wir den von den ersteren gebildeten Punkthaufen. Sein Umrisspolygon besteht zunächst aus der positiven y-Axe von $y = \infty$ bis $y = 1$; des Weiteren ist das Umrisspolygon identisch mit unserem linken Polygonzuge. Der größeren Anschaulichkeit wegen, können wir etwa in den Gitterpunkten dieses Haufens Stifte befestigt denken und einen Faden um die Gesamtheit dieser Stifte

herumschlingen. Straffgezogen nimmt derselbe genau die Gestalt unseres linken Polygonzuges an. In derselben Weise verfahren wir mit dem rechts von der w-Geraden gelegenen Punkthaufen. Sein Umrisspolygon bez. ein herumgeschlungener Faden liefert uns den rechten Polygonzug. Dies ist die einfache hier zu gebende Definition, von der wir in der Folge vielfach Gebrauch machen werden.

d. 8. XI. Wir haben noch anzugeben, welche Besonderheiten eintreten, wenn wir w gleich einer rationalen Grösse $\frac{\alpha}{\beta}$ annehmen. Die w-Linie zerlegt die Gitterpunkte zwar wiederum in zwei Klassen, in links bez. rechts gelegene Punkte. Dabei bleiben aber noch die Gitterpunkte auf der w-Linie selbst übrig, welche wir nach Belieben der einen oder anderen Klasse zurechnen können. Thun wir das erstere (fig. 1), so müssen wir zu unserm linken Umrisspolygon das Stück der w-Geraden von dem letzten Näherungs-

punkt ($p_n, q_n = \alpha, \beta$) bis ∞ hinzurechnen. Das rechte Umrisspolygon läuft dann nach unserer geometrischen Construction gleichfalls in eine unendlich lange Strecke aus, welche von p_{n-1}, q_{n-1} parallel zur w Geraden in's Unendliche reicht. Rechnen wir aber den rationalen Punkt α, β und die Vielfachen derselben ($m\alpha, m\beta$) zu den rechts von w gelegenen Punkten, so enthält das rechte Polygon die unendlich lange Seite α, β bis ∞, während das linke Poly-

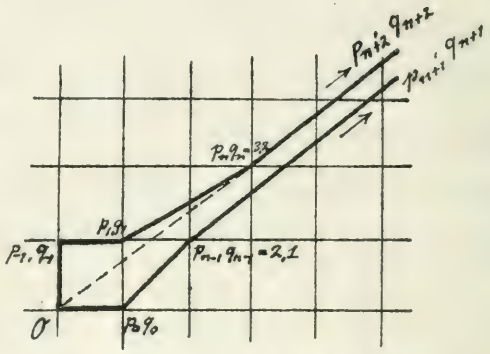


Fig. 1. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$.

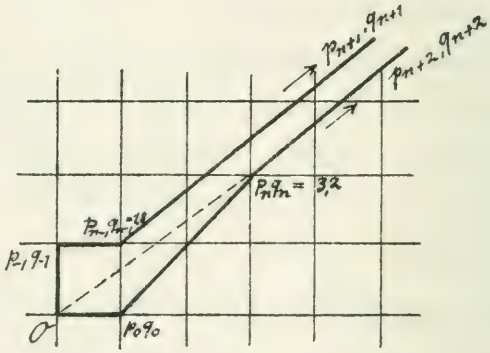


Fig. 2. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

gen die Seite p_{n-2}, q_{n-2} bis ∞ bekommt, welche der w-Geraden parallel ist. Beidemal liegt zwischen den Polygonzügen ein Elementarstreifen, im ersten Falle rechts, im zweiten links von der w-Linie.

Die geometrische Construction des Kettenbruches führt uns so noch etwas weiter, als die ursprüngliche Berechnung, indem sie uns in den unendlich fernen Ecken der Polygone noch zwei neue Näherungspunkte liefert. Wir haben somit, wie oben an den Anfang des Kettenbruches die Näherungspunkte p_0, q_0 und p_{-1}, q_{-1}, jetzt auch an das Ende desselben zwei ergänzende Näherungspunkte, p_{n+1}, q_{n+1} und p_{n+2}, q_{n+2} hinzugefügt, welche beide im Unendlichen liegen. Wir können auch arithmetisch zu ihnen gelangen, wenn wir uns das Abbrechen der Kettenbruches dadurch hervorgebracht denken, daß auf den Teilnenner a_n eine Zahl $a_{n+1} = \infty$ folgt. Hielten wir dann die Gültigkeit der Recursionsformeln auch für $r > n$

aufrecht, so ergiebt sich der Punkt

$$p_{n+1} = \mu_{n+1} p_n + p_{n-1} = \infty$$
$$q_{n+1} = \mu_{n+1} q_n + q_{n-1} = \infty \quad \text{mit } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = w$$

Dieselben Werte erhalten wir, wenn wir noch μ_{n+2} ganz beliebig wählen, aus der Recursionsformel auch für p_{n+2}, q_{n+2}, was mit unserer Construction übereinstimmt.

Auch die Möglichkeit der zwei verschiedenen Constructionen in Figur 1) und 2) läßt sich leicht arithmetisch begreifen. Haben wir nämlich einen Kettenbruch mit $\mu_n > 1$, so können wir statt $\frac{\alpha}{\beta} = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \cdots \frac{1}{\mu_n}}$ schreiben $\frac{\alpha}{\beta} = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \cdots \frac{1}{(\mu_n - 1) + \frac{1}{1}}}$

haben wir aber $\mu_n = 1$, so können wir für $\frac{\alpha}{\beta} = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \cdots \frac{1}{\mu_{n-1} + \frac{1}{1}}}$ setzen $\frac{\alpha}{\beta} = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \cdots \frac{1}{(\mu_{n-1} + 1)}}$

Wir haben es also allemal in der Hand, durch diese kleine Umänderung dem Kettenbruch nach Belieben eine <u>gerade oder ungerade Anzahl von Gliedern</u> zu geben. Geben wir ihm eine ungerade

Anzahl, bewirken also, daß n ungerade ist, so gehört p_n, q_n (wie alle Näherungspunkte mit ungeradem Index) zum linken Polygonzuge und wir kommen auf die Figur 1. Geben wir ihm eine gerade Anzahl, so wird p_n, q_n ein Punkt der rechten Polygonzuges, und wir erhalten die Figur 2.

Wir bemerken noch, daß die Annahme α und $\beta > 0$ keine wesentliche ist. Im entgegengesetzten Falle können wir nämlich dieselben Constructionen in einem der anderen Quadranten ausführen. Hiernach kommen wir noch einmal auf die <u>Diophantische Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$</u> zurück. Wir werden die Gesammtheit der Lösungen in zwei Kategorien teilen. Wir können nämlich entweder annehmen, daß

a) $\alpha > \beta$ oder daß b) $\alpha < \beta$;

dann wird auch, von den allerniedersten Fällen, die uns nicht interessiren, abgesehen, gleichzeitig sein:

a) $\gamma > \delta$ bez. b) $\gamma < \delta$.

Um alle Fälle a) aufzuzählen, nehmen

wir α und γ beliebig (natürlich relativ prim) an und entwickeln $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einen Kettenbruch von einer <u>geraden Anzahl von Gliedern</u>. Den vorletzten Näherungsbruch nennen wir $\frac{\beta}{\delta}$, während der letzte $\frac{\alpha}{\gamma}$ wird. Dann haben wir $\alpha\delta - \beta\gamma = (-1)^n = +1$ und gleichzeitig (wegen $p_n > p_{n-1}$) $\alpha > \beta$.
Um alle Fälle b) zu gewinnen, nehmen wir β und δ relativ prim und im Übrigen beliebig an, entwickeln $\frac{\beta}{\delta}$ in einen Kettenbruch von einer <u>ungeraden Gliederzahl</u>; den vorletzten Näherungsbruch nennen wir $\frac{\alpha}{\gamma}$. Dann haben wir $\beta\gamma - \alpha\delta = (-1)^n$ oder $\alpha\delta - \beta\gamma = (-1)^{n+1} = +1$ und gleichzeitig $\alpha < \beta$.
Endlich kommen wir zu unserer Ausgangsfrage zurück: <u>Wie können wir in ein gegebenes Punktgitter Parallelengitter einzeichnen?</u> Als Beziehung zwischen den Coordinaten eines Gitterpunktes im neuen Gitter (x', y') und den Coordinaten desselben Punktes im alten Gitter (x, y) fanden wir früher (pg. 3)

$$x = \alpha x' + \beta y',$$
$$y = \gamma x' + \delta y',$$

wobei $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sein musste, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze und paarweise relativ prime Zahlen wären. Wir denken sie uns diesen Bedingungen entsprechend irgendwie gegeben. Setzen wir $\frac{x}{y} = w$, $\frac{x'}{y'} = w'$, so lautet die Beziehung zwischen w und w' folgendermassen:

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$$

Diese Beziehung können wir nun auf Grund unserer neuesten Entwickelungen auch in die Gestalt eines Kettenbruches umsetzen. Zum Beweise unterscheiden wir die obigen Fälle a) und b).

Im Falle a) ($\alpha > \beta$) entwickeln wir $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einen Kettenbruch:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \cdots \frac{1}{\mu_n}}$$

von einer geraden Gliederzahl. Wir setzen dann, in Übereinstimmung mit den genannten Bedingungen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wie oben:

$\alpha = p_n$, $\gamma = q_n$, $\beta = p_{n-1}$, $\delta = q_{n-1}$.

Daneben betrachten wir den folgenden Kettenbruch:

a) $u_1 + \frac{1}{u_2} + \cdots \frac{1}{(u_n + \frac{1}{w_1})}$

Derselbe stimmt in den $n-1$ ersten Gliedern mit dem vorhergehenden überein. Daher sind auch seine $n-1$ ersten Näherungsbrüche identisch mit denen der vorhergehenden; der n^{te} Näherungsbruch (d. h. der Wert des ganzen Kettenbruches) entsteht aus dem n^{ten} Näherungsbruche des vorhergehenden durch Vertauschung von u_n mit $(u_n + \frac{1}{w_1})$. Daher ist der Wert unseres Kettenbruches a) gleich

$$\frac{(u_n + \frac{1}{w_1}) p_{n-1} + p_{n-2}}{(u_n + \frac{1}{w_1}) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n + \frac{p_{n-1}}{w_1}}{q_n + \frac{q_{n-1}}{w_1}} = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$$

Unser Kettenbruch a) hat also den Wert w. Im Falle b) ($\alpha < \beta$) entwickeln wir $\frac{\beta}{\delta}$ in einen Kettenbruch $\frac{\beta}{\delta} = u_1 + \frac{1}{u_2 + \cdots \frac{1}{u_n}}$ von ungerader Gliederzahl n, wobei, wie oben, $\beta = p_n$, $\delta = q_n$, $\alpha = p_{n-1}$, $\gamma = q_{n-1}$ ge.

setzt werden darf. Daneben stellen wir den folgenden Kettenbruch:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots \frac{1}{a_n + w'}}$$

Sein Wert ist

$$\frac{(a_n + w')p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + w')q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n + w' p_{n-1}}{q_n + w' q_{n-1}} = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$$

Unser Kettenbruch b) hat also wieder den Wert w. Wir haben also das zusammfassende Resultat: Ist w mit einer Grösse w' verbunden durch die Gl.:

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta},$$

wo zwischen den ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Relation besteht $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, so kann man die Abhängigkeit der Grösse w von w', je nachdem der Fall a) oder b) vorliegt, durch den Kettenbruch a) oder b) darstellen

Die Rechenoperationen, durch welche wir nach den Formeln a) oder b) w successive aus w' herstellen, wollen wir nun symbolisch mit Namen belegen. Es bedeute Tw' den Uebergang zum reciproken Werte

$$Tw' = \frac{1}{w'},$$

und $S\,w'$ die Hinzufügung der Einheit

$$S\,w' = w' + 1.$$

Dann können wir den Kettenbruch in die folgende symbolische Form schreiben:

$$w = S^{u_1} T S^{u_2} T \ldots S^{u_{n-1}} T S^{u_n} T w' \text{ im Falle a)}$$

$$w = S^{u_1} T S^{u_2} T \ldots S^{u_{n-1}} T S^{u_n} w' \text{ im Falle b)}$$

Bei den Formeln ist gemeinsam, daß die Operation T eine gerade Anzahl von Malen (nämlich n mal bez. $n-1$ mal) vorkommt. Dies folgt übrigens mit Notwendigkeit schon daraus, daß die Determinante der Substitution

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta},$$

welche $+1$ ist, gleich wird dem Produkte aus den Determinanten aller einzelnen Substitutionen S und T. Nun hat S die Determinante $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right| = +1$ und T die Determinante $\left|\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right| = -1$. Daher muß T eine gerade Anzahl von Malen vorkommen.

Unsere vorstehende symbolische Schreibweise des Kettenbruches enthält einen wichtigen Satz, welchen wir in der

Sprache der Substitutionentheorie folgendermaßen aussprechen:

Jede ganzzahlige Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ von der Determinante ± 1 läßt sich zusammensetzen, indem man die Operationen S und T als erzeugende Operationen in geeigneter Combination und Wiederholung verwendet.

Derselbe Satz gilt natürlich auch, wenn wir von den gebrochenen Substitutionen der ω und ω' übergehen zu den homogenen Substitutionen der Variabeln (x, y) und (x', y'). Auch diese lassen sich aus den Substitutionen:

$$S\ \left|\begin{matrix}x = x' + y'\\ y = y'\end{matrix}\right| \quad \text{und} \quad T\ \left|\begin{matrix}x = y'\\ y = x'\end{matrix}\right|$$

erzeugen nach dem Schema:

$(x, y) = S^{u_1} T S^{u_2} T \ldots S^{u_{n-1}} T (x', y')$ im Falle a)

$(x, y) = S^{u_1} T S^{u_2} T \ldots S^{u_n} (x', y')$ . . b)

cf. d. 9. VII. Diese successive Erzeugung der Substitutionen hat auch eine einfache geometrische Bedeutung. Wir wollen uns dabei auf den Fall a) beschränken, weil der Fall b) ebenso zu behandeln ist. Für unseren Zweck ist es bequem, neben S

als zweite Operation die folgende einzuführen:

$$S' = TST \quad \left| \begin{matrix} x = x' \\ y = x' + y' \end{matrix} \right.$$

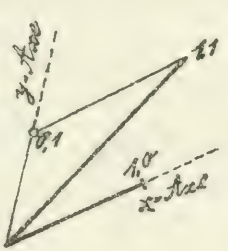
Da nun ersichtlich

$$TS^{u}T = TST.\ TST \ldots = S'^{u}$$

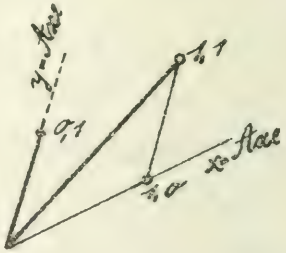
so drückt sich unsere Substitution $\left(\begin{matrix} x & \beta \\ y & \delta \end{matrix}\right)$ durch die Operation S und S' folgendermassen symbolisch aus:

$$(x\,y) = S^{u_1} S'^{u_2} S^{u_3} S'^{u_4} \ldots S^{u_{n-1}} S'^{u_n} (x', y')$$

Um diese Formel geometrisch zu deuten, führen wir den Begriff: „Elementarfigur des Coordinatensystems" ein. Wir verstehen unter der Elementarfigur den Inbegriff zweier Vectoren, der Einheitsvectors der x- und der y- Axe. Bei den Operationen S und S' wird diese Elementarfigur in einfacher Weise geändert. Bei



Operation S;



Operation S'

$$S \left\{ \begin{matrix} x = x' + y' \\ y = y' \end{matrix} \right\}$$

nämlich bleibt der x- Vector ungeändert (der Punkt $x' = 1$, $y' = 0$ hat im alten System

die Coordinaten $x=1$, $y=0$), der y-Vector dagegen wird geändert u. zw. entsteht der neue y-Vector aus dem alten, indem man zu dem letzteren den x-Vector hinzufügt. (der Punkt $x'=0$, $y'=1$ hat im alten System die Coordinaten $x=1$, $y=1$). Bei der Operation S' findet das Umgekehrte statt. In gleicher Weise wird S''^{μ} bez. S'^{μ} den Uebergang von einer Elementarfigur zu einer neuen bedeuten, wobei man zu dem y-(bez x)-Vector μ-mal den x-(bez y-) Vector hinzufügt, während man den x-(bez. y-) Vector unge-ändert läßt. Durch gesetzmäßige Wiederholung solcher Uebergänge, entsprechend unserer symbolischen Gleichung, entsteht schließlich die Elementarfigur des x', y' Systems aus der des x, y Systems.
Ein Zahlenbeispiel wird dies erläutern.
Es sei

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Da hier vermöge $8 > 5$ der Fall a vorliegt, entwickeln wir $8/3$ in einen Kettenbruch von gerader Gliederzahl

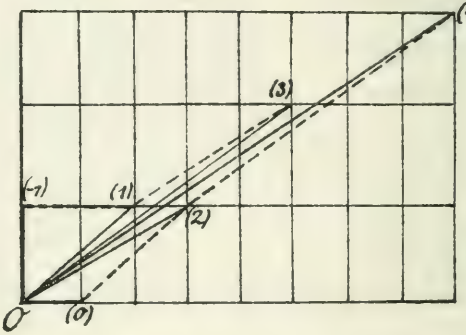
$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}.$$

Unsere Operationsvorschrift lautet daher

$$(x, y) = S^2 S' S S' (x', y').$$

Gleichzeitig mit der Kettenbruchentwicklung ziehen wir auch ihr geometrisches Gegenbild, die Umrisspolygone, in Betracht. Im Anschluss an diese verlaufen unsere Operationen folgendermassen:

Die ursprüngliche Elementarfigur besteht aus den Strecken $O_{(0)}$ und $O_{(-1)}$. Die Operation S^2 bedeutet, dass wir die erstere Strecke, den y-Vector, längs der Polygonseite $\overline{(-1)(1)}$ verschieben. Die neue Elementarfigur besteht aus den Strecken $O_{(0)}$, $O_{(1)}$. Der Operation S' entsprechend haben wir an den Vector $O_{(0)}$ den Vector $O_{(1)}$ anzusetzen, d. h. wir haben den ersteren längs der Polygonseite $\overline{(0)(2)}$ zu verschieben. Die so entstehende Elementarfigur wird gebildet von $O_{(2)}$ und $O_{(1)}$. Der nächste Schritt führt zu der Figur $O_{(2)}$ und $O_{(3)}$, der letzte endlich zu $O_{(4)}$



und $O(3)$ d. h. zu der Figur des x', y'-Coordinatensystems.

Wir erkennen: Die Erzeugung der Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ aus der Wiederholung und Combination der beiden Operationen S, S' kommt darauf hinaus, dass wir die Elementarfigur des neuen Systems aus derjenigen des alten erhalten, indem wir den y- und x-Vector des Coordinatensystems alternirend an den successiven Seiten der beiden zur Kettenbruchentwicklung von $\frac{\alpha}{\gamma}$ gehörenden Umrisspolygone entlang schieben.

Analog natürlich, wenn der Fall b) vorliegen sollte. —

Wir kommen nun zu einer letzten Eigenschaft der Kettenbruchentwickelung, welche von Langrange in seinen „Additions à l'algèbre d'Euler" 1748, (Werke Bd. 7) entwickelt worden ist. Diese Arbeit betrifft ganz besonders die Theorie der Kettenbrüche nach deren Bedeutung für die Zahlentheorie; sie ist in dieser Hinsicht grundlegend gewesen.

Es sei w irgend eine Zahl, welche wir der Einfachheit wegen als positiv und irrational annehmen. Wir betrachten die „w-Linie", deren Gleichung $wy - x = 0$ ist. Verstehen wir unter x und y ganze Zahlen, so kann die ganzzahlige lineare Form

$$wy - x$$

den Wert Null offenbar nicht annehmen. Daher kann man nach einem Minimum von

$$|wy - x|$$

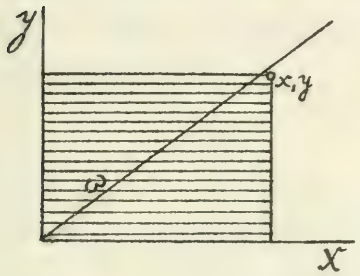
fragen. Allerdings wird es ein absolutes Minimum nicht geben können. Lässt man nämlich die ganzen Zahlen x und y in geeigneter Weise immer größer werden, so wird man sich dem Werte 0 unbegrenzt nähern. Lagrange fragt daher nach einem <u>relativen Minimum</u>, d. h. nach solchen ganzen Zahlen x, y, für welche immer

$$|wy - x| \leqq |wy' - x'|,$$

falls nur $y' \leqq y$, $x' \leqq x$. Bemerkt man, daß in rechtwinkligen x, y-Coordinaten

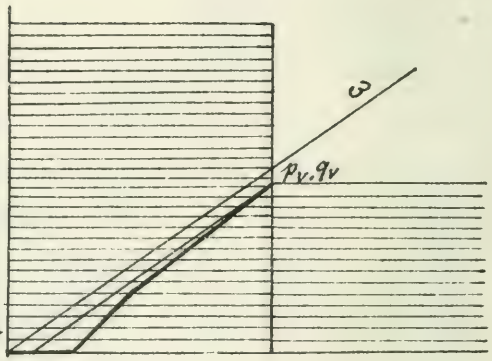
$$\left| \frac{wy - x}{w^2 + 1} \right|$$

den Abstand der Punkte x, y von der w-Geraden bedeutet, so kann man die Frage geometrisch folgendermaßen stellen: Es soll ein Gitterpunkt x, y gefunden werden, welcher unter allen Gitterpunkten, die im Innern oder auf dem Rande des Rechtecks mit den Seiten x, y liegen, den kleinsten Abstand von der w-Linie hat. Wir werden sehen, daß die Hauptnäherungspunkte $p_r q_r$ der Kettenbruchentwicklung und nur diese die in Rede stehende Eigenschaft besitzen.



Wir wollen übrigens den Punkt p_r, q_r nicht nur mit den Punkten des Rechteckes, für welche $x' \leqq x$ und $y' \leqq y$ ist, vergleichen, sondern wollen noch die bei den ganzen Streifen hinzunehmen, für welche $x' \leqq x$ oder $y' \leqq y$ ist. (vergl. die Figur, bei welcher wir $p_r q_r$ rechts von w genommen haben.) Unsere Be-

Behauptung zerfällt in zwei Teile; sie sagt aus: 1) es liegt in unserem schraffirten Gebiete rechts von der w-Geraden kein Gitterpunkt näher an dieser, als $p_r q_r$; 2) dasselbe findet links von w statt. Der Beweis ad 1) ist sehr einfach. Wir ziehen durch p_r, q_r eine Parallele zur w-Linie. Es kommen dann nur solche Gitterpunkte für uns in Betracht, welche in dem von dieser Parallelen und der w-Linie aus dem schraffirten Gebiete ausgeschnittenen schmalen Streifen oder auf seiner Begrenzung liegen. Dieser Streifen fällt aber ganz zwischen die w-Linie und unseren rechten convexen Polygonzug, also in ein Gebiet, in welchem, wie wir wissen, überhaupt kein Gitterpunkt enthalten ist. Also ist p_r, q_r unter allen Gitterpunkten der schraffirten Gebietes rechts



von ω der nächste an ω.

Der Beweis ad 2.) wird insofern ein wenig umständlicher, als wir hier 2 Fälle unterscheiden müssen.

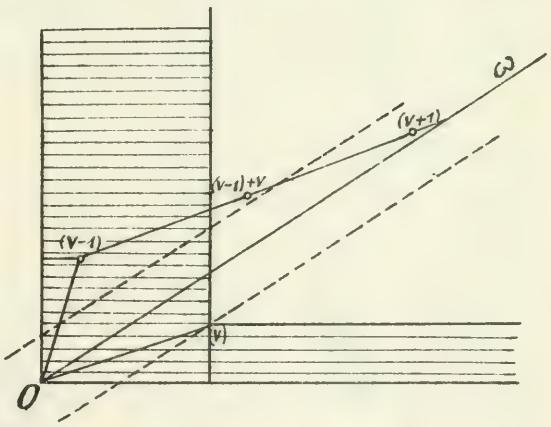
a) Die Polygonseite $(\nu-1)$ bis $(\nu+1)$ enthalte Nebenpunkte der Kettenbruchentwicklung in ihrem Innern, so daß in der Formel

$$(\nu+1) = (\nu-1) + \mu_{\nu+1}\,(\nu)$$

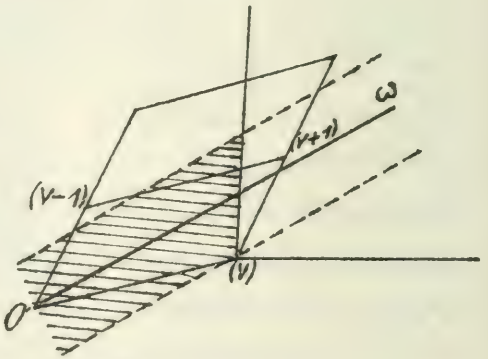
$\mu_{\nu+1} > 1$ ist.

b) sie enthalte keine Nebenpunkte, wo dann $\mu_{\nu+1} = 1$ ist.

Wir ziehen jetzt auch links von der ω-Linie eine Parallele zu dieser in demselben Abstande, wie vorher rechts davon. Dieselbe schneidet von der bis ω verlängerten Polygonseite $(\nu-1)-(\nu+1)$ ein Stück von der Länge $O(\nu)$ ab, wie aus unserer Construction der



Umrisspolygone hervorgeht.
Im Falle a) liegt dieses Stück ganz ausserhalb der schraffirten Gebietes. Denn es reicht von der w-Linie noch nicht bis an den letzten Nebenpunkt der Seite (ν-1)-(ν+1) heran, und dieser liegt seinerseits ausserhalb der schraffirten Gebietes. Daher fällt der von unserer Parallelen und der w-Linie begrenzte Streifen, soweit er schraffirt ist, in das Gebiet zwischen die w-Linie und das linke Umrisspolygon. In diesen Teile des Parallelstreifens kann sich also kein Gitterpunkt befinden.
Im Falle b) schneidet unsere Parallele das Umrisspolygon zwischen den Hauptpunkten (ν-1) und (ν+1). Der schraffirte Teil unseres Parallelstreifens greift jetzt möglicherweise noch mit einem kleinen Dreiecke über das Umrisspolygon hinaus. Während



sich für den übrigen Teil die Frage wie vorher erledigt, bleibt dieses Dreieck besonders zu untersuchen. Man setze zu dem Zwecke an die Seite $(\nu-1)-(\nu+1)$ des Elementarparallelogrammes $(0, (\nu-1), (\nu+1), (\nu))$ ein diesem kongruentes Parallelogramm an. Unser fragliches Dreieck fällt dann ganz in das Innere des letzteren. In Folge dessen kann es keinen Gitterpunkt enthalten.

Damit ist bewiesen, daß jeder Näherungspunkt $p_\nu q_\nu$ ein relatives Minimum von $|wy - x|$ liefert.

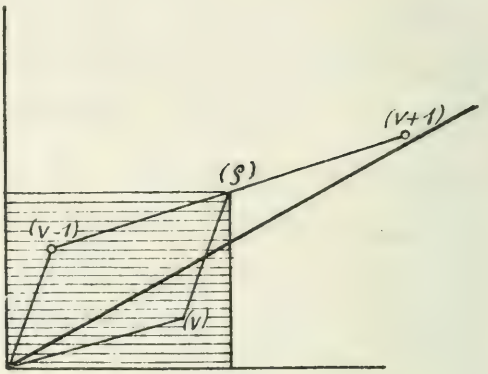
Es bleibt noch umgekehrt zu zeigen, daß jeder Gitter-Punkt, welcher diese Eigenschaft besitzt, ein Näherungspunkt u. zw. ein Hauptnäherungspunkt ist.

Wir thun dies in 2 Schritten und zeigen, daß weder ein Nebenpunkt noch überhaupt irgend ein anderer Gitterpunkt außerhalb des Umrißpolygons zu einem relativen Minimum Anlaß geben kann.

1.) Wir betrachten die zwischen $(\nu-1)$ und $(\nu+1)$ eingeschalteten Nebenpunkte, deren Lage durch

$$(\nu-1) + \varrho(\nu), \quad \varrho = 1, 2, \ldots \mu_{\nu+1}-1$$

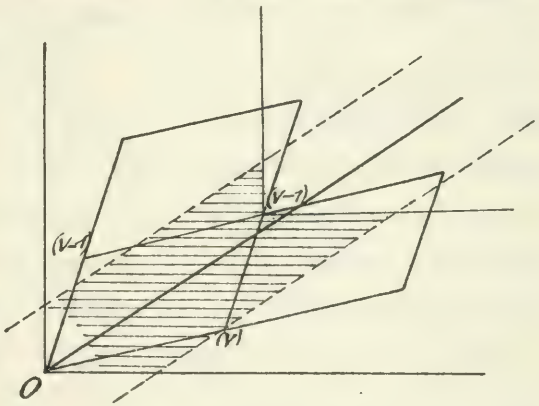
bestimmt war. Construiren wir durch irgend einen dieser Nebenpunkte (ϱ) die Parallelen zu den Coordinatenaxen, so enthält das entstehende Rechteck den (ν)ten Hauptpunkt im Innern. Denn nach der vorstehenden Formel werden die Coordinaten von (ϱ) aus denen von (ν) durch Hinzufügung positiver Stücke erhalten. Überdies hat (ν) einen kleineren Abstand von w wie (ϱ). Dies haben wir bereits bei der Figur auf pag. 43 gesehen. Also liefert ein Nebenpunkt niemals ein relatives Minimum von $|wy - x|$.



2. Denselben Nachweis erbringen wir für irgend welche Gitterpunkte ausserhalb unserer Polygonzüge. Zu dem Zwecke zeigen wir (was eigentlich viel mehr ist) daß unter allen Punkten, welche näher an w liegen als (ν) derjenige

mit den kleinsten Coordinaten x, y der Punkt $(\nu+1)$ ist.

Zu beiden Seiten der w-Linie grenzen wir unsere beiden Parallelstreifen ab, in denen die fraglichen Punkte sämmtlich enthalten sein müssen. Sodann ziehen wir durch $(\nu+1)$ Parallelen zur x- und y- Axe. Diese schneiden aus den Parallelstreifen ein Stück aus, welches in der Figur schraffirt ist. Wir haben zu zeigen, dass in diesem Stück ausser (ν) u. $(\nu+1)$ kein Gitterpunkt enthalten ist.



In der That, setzen wir an das Elementarparallelogramm $(0, (\nu-1), (\nu+1), (\nu))$ zwei congruente Parallelogramme längs der Seiten $(\nu-1)(\nu+1)$ und $(\nu)(\nu+1)$ an, so enthalten ~~sie~~ die beiden Zipfel des schraffirten Gebietes, welche über das erste Parallelogramm herausgreifen, in ihrem Innern, wie man solches

im Einzelnen auf Grund unserer Construction erkennt. Nun liegen aber im Innern der Elementarparallelogramme sicher keine Gitterpunkte. Also sind (ν) und $(\nu+1)$ die einzigen Gitterpunkte auf schraffirtem Gebiet und $(\nu+1)$ ist unter allen Gitterpunkten, welche näher an ω liegen als (ν), derjenige mit den kleinsten Coordinaten.

Nun zur Betrachtung eines beliebigen Gitterpunktes x, y, welcher nicht einem der Polygonzüge angehört! Die Sache erledigt sich jetzt von selbst. Wir setzen voraus, dass (x, y) ein relatives Minimum von $|\omega y - x|$ ergebe. Unter den Gitterpunkten, welche eine kleinere x bez. y-Coordinate haben, als der Punkt x, y, wird es eine Reihe von Hauptnäherungspunkten geben. Sei (ν) der letzte in dieser Reihe, so dass $p_\nu \leqq x$ oder $q_\nu \leqq y$, während $p_{\nu+1} > x$, oder $q_{\nu+1} > y$. Nach Annahme ist gleichzeitig $|\omega y - x| < |\omega p_\nu - q_\nu|$. In Folge dessen wäre unter den Gitterpunkten, welche einen kleineren Abstand von ω haben als (ν), nicht $(\nu+1)$

sondern (x, y) derjenige mit den kleinsten Coordinaten. Dies steht aber in Widerspruch mit unserm vorhergehenden Resultat.

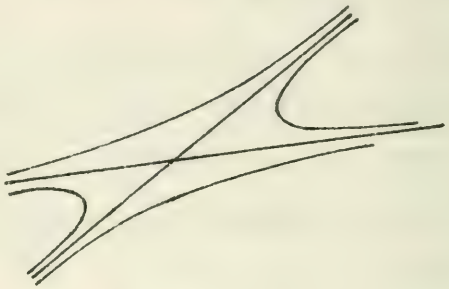
Somit ist bewiesen, daß kein anderer Gitterpunkt ein relatives Minimum unserer linearen Form ergeben kann, ausser den Hauptnäherungspunkten der Kettenbruchentwickelung. Es ist also auch die Umkehrung des Lagrange'schen Satzes vollständig dargethan.

Ich möchte im Anschluße hieran noch eine Arbeit von Hurwitz (Math. Ann. Bd. 39 pg. 279 u. f.) zur Sprache bringen, in welcher die Frage nach den Minimalwerten von $|\omega y - x|$ noch etwas weiter geführt wird. Das Resultat von Hurwitz lautet, in unsere Sprechweise übertragen: Man kann den Punkt x, y unter den Eckpunkten der Umrißpolygone immer so auswählen, daß

$$|\omega y - x| \leqq \frac{1}{\sqrt{5}\, y}$$

wird. Construiren wir uns diejenigen Curven, welche dem Gleichheitszeichen entsprechen, d. h. die beiden Hyperbeln

$wy^2 - xy = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $wy^2 - xy = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;
dieselben haben die x- Axe und w-Linie zu Asymptoten und grenzen um diese einen schmalen Streifen ab. Der Hurwitz'sche Satz sagt dann ein, fast aus, dass jedenfalls einige Eckpunkte unserer Polygonzüge in bez. an diesen Streifen reichen. Jedenfalls wird sich auch der Beweis dieses Satzes bei Benutzung unseres Bildes besonders übersichtlich gestalten.



I. Hauptteil.

Wir kommen nun zu dem eigentlichen Thema dieser Vorlesung, zu der

Reductionstheorie der binären quadratischen Formen,

welche wir ein für allemal in die Gestalt setzen.

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

1. Geometrische Vorbegriffe.

Der zahlentheoretischen Betrachtung schicken wir einige geometrische Ueberlegungen von allgemeinem Charakter voraus, wie sie in allerdings viel umfassender Form in der Erlanger Programmschrift: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen: (abgedruckt in Ann. Bd 43) entwickelt worden sind. Es handelt sich darum, die Gesammtwissenschaft der Geometrie nach allgemeinen mathematischen Gesichtspunkten einzuteilen, nicht darum, dieselbe vom philosophischen Standpunkte grundsätzlich aufzubauen. In diesem Sinne nehmen wir für das Folgende ein rechtwinkliges Coordinatensystem als gegeben an; übrigens genügt es für unseres Zweckes von der Geometrie der Ebene zu handeln.

Unsere Einteilung ist eine gruppentheoretische. Wir unterscheiden so viele Arten von Geometrie, als es Gruppen von Operationen giebt, denen wir die geometrischen Gebilde unterwerfen mögen.

1.) Wir beginnen mit der <u>metrischen oder elementaren Geometrie</u>. Hier betrachtet man diejenigen Figuren als gleichwertig, welche sich nur durch die Lage oder durch den Maassstab der Zeichnung unterscheiden. Man läßt also die Operationen der <u>Bewegung</u> und der <u>Ähnlichkeitstransformation</u> zu. Ihren analytischen Ausdruck finden sie in den Gleichungen:

$$x = aX + bY + c \qquad | \qquad a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2$$
$$y = a'X + b'Y + c' \qquad | \qquad ab + a'b' = 0.$$

Das x, y und das X, Y-System sind entweder congruent oder ähnlich, entweder gleichstimmig oder entgegenstimmig.

Die hierdurch umgrenzten Operationen bilden eine Gruppe, welche <u>Hauptgruppe</u> heisst. Die Hauptgruppe umfasst alle diejenigen Operationen, bei denen die inneren Eigenschaften der Figuren ungeändert bleiben. Umgekehrt gehören nur solche Eigenschaften in die Geometrie, welche ungeändert bleiben bei den Operationen

der Hauptgruppe. Durch diese Beziehung zur Hauptgruppe unterscheidet sich die Geometrie der Ebene von einer individuellen Betrachtung der Wertsysteme x, y. Elementargeometrie, so können wir auch sagen, ist Invariantentheorie der Hauptgruppe.

2.) Neben die Elementargeometrie stellt sich als zweite die affine Geometrie. Ihre Gruppe besteht aus sämmtlichen affinen Transformationen, also aus den Umänderungen

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = a'x + b'y + c',$$

wo jetzt die Bedingungsgleichungen für die Coëfficienten in Wegfall kommen. Sie entstehen aus den Transformationen der Hauptgruppe durch Hinzunahme beliebiger Parallelprojectionen.

Die affine Geometrie interessirt sich nur für solche Eigenschaften der Figuren, welche durch affine Operationen nicht zerstört werden.

3.) Die nächst höhere Geometrie ist die projective. Ihre Gruppe besteht

aus den Abänderungen der folgenden Form

$$x' = \frac{a\,x + b\,y + c}{a''x + b''y + c''},$$

$$y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}$$

In den bisherigen Operationen sind hier die Centralprojectionen hinzugekommen. In der projectiven Geometrie sieht man als wesentlich nur solche Eigenschaften an, welche auch bei beliebiger Centralprojection, also bei beliebiger Veränderung der Augenpunkter im Raume und beliebiger Stellung der Projectionsebene erhalten bleiben. — So kann man successive fortgehen, indem man die Gruppe der Geometrie um neue Operationen erweitert und jedesmal die Invariantentheorie dieser erweiterten Gruppe studirt. —

In der metrischen Geomtrie ist die wichtigste Invariante die Entfernung, in der projectiven ist sie das Doppelverhältniss. In der affinen Geometrie bleibt neben letzterem auch der Flä-

Flächeninhalt der Figuren invariant.

Sehen wir nämlich von den constanten Gliedern in den Transformationsgleichungen ab, deren Hinzunahme nur eine Verschiebung, also eine Transformation der Hauptgruppe bedeutet, so können wir sie schreiben:

$$x = aX + bY$$
$$y = cX + dY.$$

Sind $00, xy, x'y'$ die Ecken eines Dreiecks in ursprünglicher, $00, XY, X'Y'$ in transformirter Lage, so wird sein Inhalt

$$\frac{1}{2}(xy' - x'y) = \frac{1}{2}(ad - bc)(XY' - X'Y).$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird, da man jede Figur aus einer Anzahl von Dreiecken zusammensetzen kann, auch der Flächeninhalt jeder Figur ändert sich bei affiner Transformation also nur um die Determinante der Substitution. Liegt der für das Spätere wichtige Fall vor, daß die Determinante gleich Eins ist, so bleibt der Flächeninhalt schlechtweg invariant.

Im Vorhergehenden gingen wir genetisch vor, indem wir durch succes-

sive Abstraction von der metrischen Geometrie zur projectiven aufstiegen. Systematischer gestaltet sich noch das umgekehrte Verfahren. Wir suchen zunächst diejenigen Verhältnisse der geometrischen Figuren auf, welche bei allen Umformungen der projectiven Gruppe erhalten bleiben. Um zum Standpunkte der affinen Geometrie überzugehen, adjungiren wir die unendlich ferne Gerade und ziehen dementsprechend nunmehr denjenigen Teil der projectiven Umformungen in Betracht, welche die unendlich ferne Gerade in sich überführen. In entsprechender Weise kommen wir von der affinen zu der metrischen Geometrie, wenn wir die beiden Kreispunkte adjungiren / vergl. auch hierzu das Erlanger Programm /.

Dies Verfahren trägt gleichzeitig die Möglichkeit einer Verallgemeinerung in sich. Wir könnten ja bei dem Übergang von der affinen zur metrischen Geometrie auch zwei andere Punkte

der unendlich fernen Geraden ebenso gut festhalten, als gerade die Kreispunkte. Wir gelangen dann nicht zur gewöhnlichen metrischen Geometrie, sondern zu einer allgemeinen, pseudometrischen (oder besser gesagt, wie Salmon ursprünglich wollte, zu einer quasimetrischen) Geometrie. Die gewöhnliche metrische Geometrie erweist sich dann als ein specieller Fall der letzteren.

Sind $x : y : t$ gewöhnliche homogen gemachte rechtwinklige Coordinaten, so werden die Kreispunkte bekanntlich durch die folgenden Gleichungen bestimmt: $x^2 + y^2 = 0, t = 0$. Entsprechend lautet der Ausdruck für die Entfernung in der gewöhnlichen Geometrie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Statt der Kreispunkte wählen wir in der Pseudogeometrie die auf der unendlich fernen Geraden gelegenen Nullpunkte einer beliebigen quadratischen Form, d. h. die Punkte:

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \quad t = 0,$$

als Grundpunkte der Maafsbestimmung und definiren als Pseudoentfernung.

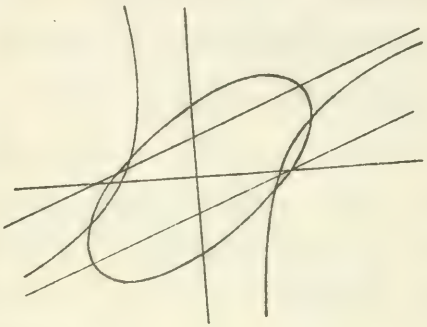
indem wir wieder $t = 1$ setzen) den folgenden Ausdruck

$$r = \sqrt{a x^2 + b x y + c y^2}.$$

Drei Fälle sind dabei zu unterscheiden. Die Grundpunkte können zwei conjugirt imaginäre, zwei getrennte reelle oder zusammenfallende Punkte sein, je nachdem $b^2 - 4ac < 0$, > 0 oder $= 0$ ist. Im ersten Fall ist die Form $f(x, y)$ eine definite, positive oder negative. Die Curve $r^2 = 1$, welche dem Einheitskreise der gewöhnlichen Geometrie entspricht, wird, in der gewöhnlichen Maassbestimmung betrachtet, eine Ellipse oder ein imaginärer Kegelschnitt, je nachdem f eine positive oder negative Form ist. Wir werden unsere Betrachtung auf den Fall der positiven Formen beschränken, weil die negativen leicht auf diese zurückgeführt werden können. Wir wollen daher sagen: im ersten Falle wird der Pseudokreis $r^2 = 1$ eine Ellipse, dementsprechend nennen wir diesen den elliptischen Fall der Maassbestimmung. Im zweiten Falle wird die Curve $r^2 = 1$ eine Hyperbel, dies nennen wir den hyperbo-

lischen Fall. Den dritten Fall werden wir als parabolischen bezeichnen. Die Curve $r^2 = 1$ besteht hier aus den beiden geraden Linien

$$a x + \frac{b y}{2} = \pm \sqrt{a}.$$



Damit haben wir den allgemeinen, man möchte sagen souveränen Standpunkt der Cayley'schen Maassbestimmung bezeichnet. Das Wesentliche ist, dass wir die Maassbestimmung nicht als etwas durch die Natur der Ebene von vorneherein gegebenes ansehen, vielmehr durch freiwillige Festsetzung der Ebene auferlegen. Es wird unsere nächste Aufgabe sein, uns mit dem verschiedenen Charakter der dreierlei Fälle im Einzelnen vertraut zu machen.

1. Elliptischer Fall.

Die Entfernung eines Punktes x, y von dem Nullpunkte wurde bereits definirt durch die Gl. $r^2 = f(x, y)$. In entsprechender Weise werden wir für die Entfernung

irgend zweier Punkte $x\,y$ und $x'\,y'$ den Ausdruck festsetzen: $r^2 = f(x-x', y-y')$. Das System der Curven $r = \text{const.}$, welches den concentrischen Kreisen in der gewöhnlichen Geometrie entspricht, besteht aus einem Systeme ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen.

Weiter haben wir den Begriff des Winkels in die Pseudogeometrie zu übertragen. In der gewöhnlichen Geometrie berechnet sich der Winkel zweier Strecken $O(x, y)$ und $O(x'\,y')$ folgendermassen:

$$\varphi = \text{arc. cos.} \frac{x x' + y y'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}} = \text{arc. sin} \frac{x y' - x' y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

In unserer allgemeinen Maassbestimmung müssen wir den Winkel natürlich so definiren, dass er in die vorstehende Grösse übergeht, falls wir die Grundpunkte der Maassbestimmung durch affine Transformation, also homogene lineare Transformation der x und y, in die Kreispunkte rücken lassen. Dementsprechend setzen wir $a x^2 + b x y + c y^2$ an die Stelle von $x^2 + y^2$ und bilden statt $x x' + y y'$, welcher Ausdruck die Polare der Punk-

tes $x'y'$ in Bezug auf das Geraden-
paar $x^2 + y^2 = 0$ darstellt, die Po-
lare $axx' + b\left(\frac{xy' + x'y}{2}\right) + cyy'$
in Bezug auf unser neues Geraden-
paar $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$.
Somit definiren wir den Winkel der
Strecken $O(x, y)$ und $O(x', y')$ in der Pseudo-
geometrie folgendermaaßen:

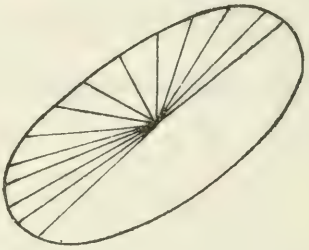
$$\varphi = \text{arc. cos.} \frac{axx' + b/2\,(xy' + x'y) + cyy'}{\sqrt{ax^2 + bxy + cy^2}\,\sqrt{ax'^2 + bx'y' + cy'^2}}$$

woraus sich noch als zweiter Ausdruck er-
giebt:

$$\varphi = \text{arc. sin.} \frac{(xy' - x'y)\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{ax^2 + bxy + cy^2}\,\sqrt{ax'^2 + bx'y' + cy'^2}}.$$

Zur Veranschaulichung wollen wir zusehen,
was die Gleichheit zweier Winkel bedeutet.
Wir wollen uns vom Mittelpunkte der Ein-
heitsellipse eine Anzahl von Geraden zeich-
nen, welche im Sinne der Pseudogeometrie
die gleiche Winkel mit einander bilden,
also geradezu eine Winkelscala construi-
ren. Die entstehenden Ellipsenvectoren
sind dann im Sinne der Pseudge-
ometrie <u>congruent</u>, d. h. sie können

durch Pseudobewegung, hier durch blosse Drehung, zur Deckung gebracht werden. Im Sinne der gewöhnlichen Maassbestimmung sind sie immer noch inhaltsgleich. Denn die Pseudodrehungen machen einen gewissen Teil der



affinen Transformationen aus; sie haben ausserdem die Determinante $+1$, weil sie einen bestimmten Flächeninhalt, nämlich die Fläche der Einheitsellipse, in sich überführen. In Folge dessen bleibt bei unseren Drehungen nach Obigem auch im Sinne der gewöhnlichen Maassbestimmung der Flächeninhalt der Figuren invariant. Diese Bemerkung dient dem Auge als Anhalt, wenn wir, wie in der Figur, um O eine Winkelspirale entwerfen wollen.

Hieran könnten wir noch weitere Bemerkungen über die anderen Operationen in der Gruppe unserer Pseudogeo-

metrie, Aehnlichkeitstransformation und Spiegelung, anschliessen.

Diejenigen unter Ihnen, denen diese im Grunde sehr einfachen Begriffe ungewohnt sind, können sich dieselben vielleicht durch einen Vergleich mit der allgemeinen Flächentheorie näher bringen. Dort führt man bekanntlich als krummlinige Coordinaten einer Flächenpunktes irgend zwei Curvensysteme x und y ein und stellt das Linienelement, d. h. die Entfernung zweier benachbarter Punkte durch sie folgendermassen dar:

$$ds = \sqrt{E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2},$$

wo die E, F, G im Allgemeinen Functionen von x und y sein werden. Unsere Maassbestimmung in der Ebene nun, in welcher

$$ds = \sqrt{a dx^2 + b dx dy + c dy^2}$$

wird, erweist sich als ein specieller Fall jener, indem nämlich bei uns E, F und G constante Grösen sind. In analytischer Hinsicht ordnet sich

unsere Maassbestimmung durchaus in die allgemeine Flächentheorie ein, nur die Auffassung ist in beiden Fällen eine verschiedene. In der Flächentheorie denken wir uns die Maassbestimmung der geometrischen Gestalt der Fläche entnommen, in unserem Falle dagegen tragen wir sie unsererseits durch einen Akt der Willkür in die Fläche herein. Das ist derselbe Gedanke, den wir, soweit die Ebene in Betracht kommt, schon oben berührten.

Eine bedeutende Vereinfachung erzielen wir dadurch, dass wir unsere quadratische Form f in zwei complexe Factoren spalten:

$$f(x,y) = \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\,y\right)\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\,y\right)$$

und diesen Factoren einen geometrischen Sinn beilegen. Jeder dieser Factoren, gleich Null gesetzt, stellt eine gerade Linie dar, welche durch den einen oder anderen Grundpunkt auf der unendlich fernen Geraden hindurchgeht. Wir bezeichnen sie nach dem Vorgange von Lie als Minimallinien. Den Minimallinien kommen

im Sinne unserer Maaßbestimmung die paradoxen Eigenschaften zu: sie haben beispielsweise die Länge Null und stehen auf sich selbst rechtwinklig, wie aus unseren obigen Definitionen von Entfernung und Winkel hervorgeht.

Daß diese Linien imaginär sind, soll uns nicht davon abhalten, mit ihnen geometrisch zu operiren. Wir werden dieselben sogar zu Axen eines Coordinaten-Systems, des „Minimalcoordinaten-Systems" machen. Die Minimalcoordinaten ξ und η definiren wir als Parameter in den beiden Geradensystemen, welche der einen oder anderen Minimallinie parallel laufen; wir setzen einfach

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sqrt{a}\, x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}\, y \\ \eta &= \sqrt{a}\, x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}\, y \end{aligned}\right\} \text{, so daß } \underline{r = \sqrt{\xi\,\eta}} \text{ wird}$$

Die Minimalcoordinaten sind gewöhnliche (nur imaginäre) Parallelcoordinaten. Einem reellen Punkte der Ebene x und y entsprechen 2 conjugirt

imaginäre Werte von ξ und η.

Die Minimallinien der gewöhnlichen Maafsbestimmung sind die beiden Strahlen nach den Kreispunkten $x + iy = 0$ und $x - iy = 0$. Die Minimalcoordinaten sind hier einfach zu definiren

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - iy \\ \eta &= x + iy \end{aligned}\right\}.$$

Überall da, wo man in der gewöhnlichen Geometrie der Ebene mit den complexen Aggregaten $x + iy$ und $x - iy$ rechnet, können wir demnach von Minimalcoordinaten reden. Der Nutzen der Minimalcoordinaten ist hiernach aus der Functionentheorie, aus der Mechanik etc. hinlänglich bekannt. Für unsere Zwecke liefern sie wesentliche Vereinfachungen. Wir stellen zunächst den Ausdruck für eine Drehung in Minimalcoordinaten her. Eine Drehung um 0 ist eine lineare Substitution in den x, y, also auch in den ξ, η. Nun bleiben bei der Drehung die Grundpunkte, also auch die Strahlen von 0 nach diesen, d. h. die Mi-

nimallinien ungeändert. Eine Dre-
hung führt also $\xi = 0$ in $\xi' = 0$ über
und $\eta = 0$ in $\eta' = 0$. Daher nimmt der
Ausdruck für eine Drehung folgende
Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= m\xi \\ \eta' &= m'\eta \end{aligned}\right\}.$$

Berücksichtigen wir noch, daß die De-
terminante der Substitution gleich 1
und die Coefficienten conjugirt
imaginär sein müssen, wenn an-
ders die Drehung reelle Punkte in
reelle überführen soll, so können wir
die vorstehenden Gleichungen folgender-
maßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= e^{i\varphi} \cdot \xi \\ \eta' &= e^{-i\varphi} \cdot \eta \end{aligned}\right\}.$$

Die reelle Grösse φ bedeutet den Dre-
hungswinkel im Sinne unserer Maass-
bestimmung. Aus den vorstehenden
Gl. folgt nämlich durch Addition

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{(\xi'\eta + \xi\eta')}{\xi\eta} = \frac{\xi\eta}{r^2}:$$

oder auch, da $\xi\eta = \xi'\eta' = r^2$:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{(\xi'\eta + \xi\eta')}{\sqrt{\xi\eta}\cdot\sqrt{\xi'\eta'}}$$

was mit der Winkeldefinition von pag. 61 übereinstimmt, weil $\frac{\xi\eta + \xi\eta'}{2}$ die Polare von $\xi\eta$ ist.

Viel eleganter aber können wir jetzt den Pseudowinkel im Anschluss an unsere Drehungssubstitution folgendermassen definiren.

Der Winkel der beiden Strahlen von 0 nach (ξ,η) und (ξ',η') ist gleich $\frac{i}{2}$ multiplicirt mit dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die genannten Strahlen mit den Minimallinien bilden. Aus unseren Substitutionsformeln folgt nämlich durch Division die Gleichung.

$$\varphi = \frac{i}{2}\,lg\left(\frac{\xi'}{\eta'} : \frac{\xi}{\eta}\right),$$

welche die neue Winkeldefinition ergiebt. Dieselbe ist natürlich nur in der Form von der früheren verschieden, analytisch ist sie jener ganz gleichwertig.

Do. 21. Nov. 95. Zum Schlusse unserer Aus-

führungen über die elliptische Maass-
bestimmung müssen wir bemerken, dass
wir uns alle diese Einzelheiten hätten er-
sparen können. Wir hätten nämlich mit
Zuhilfenahme projectiver Begriffe ein-
fach folgendermassen sagen können.
Wir erhalten die elliptische Maassbe-
stimmung in einer Ebene, wenn wir
eine mit gewöhnlicher Maassbestim-
mung ausgestattete Ebene durch Parallel-
projection auf jene beziehen und
die Maassverhältnisse aus der Origi-
nalebene auf die entsprechenden Stüke
der Bildebene übertragen. Wir
haben nur dafür zu sorgen, dass die
Kreispunkte bei der Projection über-
gehen in die Grundpunkte der ellip-
tischen Maassbestimmung. Dabei wird
beispielsweise aus dem System con-
centrischer Kreise um O in der Origi-
nalebene das System ähnlicher und
ähnlich gelegener Ellipsen in
der Bildebene werden; eine gewöhn-
liche Winkelskala congruenter Teile
verwandelt sich in die elliptische

Winkelskala von pag. 62.

Die Sache liegt, kurz gesagt, so: Indem wir von einer elliptischen Maafsbestimmung in der Bildebene sprechen, denken wir an die gewöhnliche Maafsbestimmung in der Originalebene.

Zum Beweise dessen greifen wir auf unsere Formeln für Minimalcoordinaten zurück. Seien ξ, η die oben definirten Minimalcoordinaten der elliptischen Maafsbestimmung, $\overline{\overline{\overline{

Es ist aber aus der projectiven Geometrie bekannt, dass dieses die Gleichungen einer Parallelprojection der x', y' - auf die x, y - Ebene sind. Eine mit elliptischer Maassbestimmung ausgestattete x, y - Ebene kann also durch Parallelprojection stets in eine x, y - Ebene mit gewöhnlicher Maassbestimmung übergeführt werden.

2.) Hyperbolischer Fall, $b^2 - ac > 0$

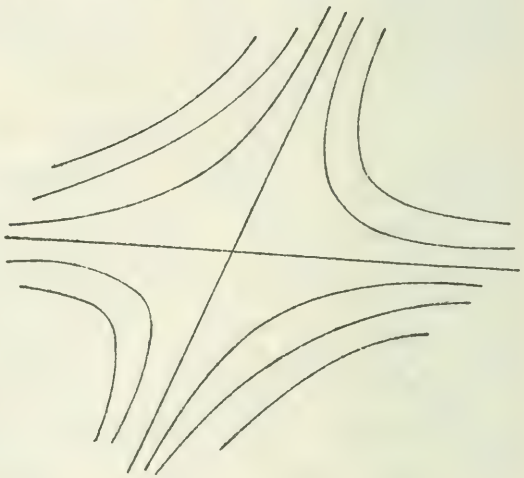
Dieselbe Betrachtungsweise liesse sich auch auf den Fall der hyperbolischen Maassbestimmung anwenden. Wir können die hyperbolische Ebene gleichfalls durch Parallelprojection in eine Ebene mit gewöhnlicher Maassbestimmung verwandeln, wobei der Uebergang durch dieselben Transformations-gleichungen wie vorhin vermittelt wird. Diese Gleichungen enthalten jetzt aber in ihren Coefficienten die Quadratwurzel aus einer negativen Grösse. Die Projection wird daher jetzt eine imaginäre. Da aber die Verhältnisse bei einer imaginären Projection nicht ohne Weiteres anschaulich sind,

müssen wir die geometrische Bedeutung der hyperbolischen Maaßbestimmung im Einzelnen durchgehen, und eben deshalb hatten wir als eine Vorübung das Gleiche vorhin bei der elliptischen Maaßbestimmung gethan.

Den Abstand eines Punktes x, y von 0 definiren wir nach wie vor durch den Ausdruck

$$r = \sqrt{a x^2 + b x y + c y^2} = \sqrt{\xi \cdot \eta}$$

Für die Punkte gleichen Abstandes besteht die Gleichung $a x^2 + b x y + c y^2 = C$. In dem besonderen Falle $C = 0$ zerfällt die Curve gleichen Abstandes in 2 reelle gerade Linien $\xi = 0$, $\eta = 0$; es sind dieses die



„Minimallinien der hyperbolischen Maaßbestimmung", deren sämmtliche Punkte von 0 den Abstand Null besitzen. Die Minimallinien

zerlegen die Ebene in zwei Doppel-
vectoren. In dem einen Doppelvector
haben ξ und η gleiches, in dem ande-
ren entgegengesetztes Vorzeichen.

Ist C von Null verschieden, so
besteht die Curve gleichen Abstandes
aus einer Hyperbel, welche die Mini-
mallinien zu Asymptoten hat. Die-
selbe liegt in dem ersten oder zwei-
ten Doppelvector, je nachdem $C > 0$
oder $C < 0$ ist. Die Punkte des ersten
Sectors haben daher von O einen re-
ellen, die des zweiten einen imagi-
nären Abstand.

Unter dem Winkel (φ) zweier von o
auslaufenden Strahlen verstehen wir
hier wie im vorigen Falle den mit
$\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus derjeni-
gen Doppelverhältnisses, welches jene
Strahlen mit den Minimallinien bil-
den. Hinsichtlich der Realität des
Winkels müssen wir zwei Fälle un-
terscheiden:

a. Beide Geraden liegen in demsel-
ben Doppelsector. Dann besitzt das

genannte Doppelverhältniss einen positiven Wert, wir haben daher, unter ϱ eine reelle Grösse verstanden:

$$lg\, DV = \varrho \pm 2k\pi i$$

und

$$\varphi = \frac{i\varrho}{2} \pm k\pi$$

Zwei Strahlen, welche demselben Sector angehören, bilden also mit einander, von Multiplis der Zahl π abgesehen, einen rein imaginären Winkel.

b. Beide Geraden liegen in verschiedenen Sectoren. Dann ist das Doppelverhältniss negativ, also

$$lg\, DV = \varrho \pm (2k+1)\pi i$$

und

$$\varphi = \frac{i\varrho}{2} \mp (k + \frac{1}{2})\pi$$

Zwei Strahlen, welche durch die Minimalgeraden getrennt werden, liefern also einen Winkel, dessen reeller Bestandteil ein ungerades Vielfaches von $\pi/2$ ist. Die Minimallinien selbst bilden mit jeder Geraden einen unendlich grossen Winkel. Lassen wir nämlich einen der vorher betrachteten Strahlen in eine

der Minimallinien rücken, so wird das Doppelverhältniss 0 oder ∞. Der zugehörige Winkel ist also allemal unendlich gross.

Wollen wir, was später bequem sein wird, den imaginären Winkel φ durch eine reelle Grösse ψ ausdrücken: $\varphi = i\psi$, so müssen wir natürlich auch den $\sin\varphi$ durch $\sin i\psi = \mathfrak{sin}(\psi)$ ersetzen. In den trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie sind also dann die trigonometrischen Functionen durch die sog. hyperbolischen zu ersetzen.

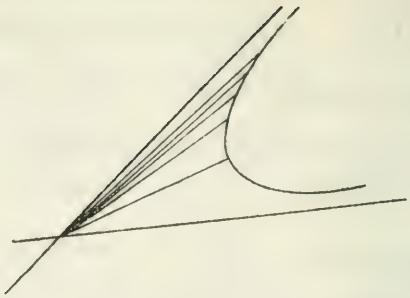
Durch die Minimalcoordinaten ξ und η drückt sich der Winkel wieder besonders einfach aus:

Es wird nämlich

$$\varphi = \tfrac{1}{2} \lg \left(\frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{\eta'}{\xi'} \right)$$

Wollen wir nun auch eine <u>hyperbolische Winkelskala</u> construiren, so zeichnen wir uns zunächst die Einheitshyperbel $r^2 = 1$. Einen von 0 aus nach dieser verlaufenden

Radiusvector drehen wir nun fortgesetzt um den gleichen hyperbolisch gemessenen Winkel vorwärts, wobei der Endpunkt der Vectors auf der Hyperbel fortgleitet. Die von dem Vector beschriebenen Flächen, welche im Sinne der hyperbolischen Maasbestimmung congruent sind, bleiben im Sinne der gewöhnlichen Maasbestimmung inhaltgleich. Danach ist die Figur der Winkelskala zu entwerfen.



Wenn wir solcher Weise den Radius-Vector fortgesetzt um den gleichen Betrag weiter drehen, bringen wir ihn einer der Minimallinien immer näher, ohne sie jedoch jemals zu erreichen. Denn der Flächeninhalt welcher von unserem Radius-Vector, der Einheitshyperbel und der Minimallinie eingeschlossen wird, ist unendlich gross

Bei einer endlichen Anzahl endlicher Drehungen überstreichen wir aber mit unserem Radius-Vektor nur eine endliche Fläche. Wir gelangen also, so oft wir auch drehen mögen, niemals bis in die Minimallinie hinein. Daraufhin verstehen wir auch, warum die Minimallinie mit jeder Geraden einen unendlich grossen Winkel bilden muss.

Der analytische Ausdruck für eine <u>Drehung</u> um O ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung für den Winkel zweier von O auslaufenden Geraden. Danach besteht zwischen einem Punkte $\xi' \eta'$ der um φ gedrehten Geraden und einem Punkte $\xi \eta$ der Geraden vor der Drehung die Relation:

$$\frac{\xi'}{\eta'} = e^{2i\varphi} \cdot \frac{\xi}{\eta} .$$

Spalten wir diese Gleichung so, dass $\xi\eta = \xi'\eta'$ wird, so erhalten wir die Coordinaten ξ', η' desjenigen Punktes, in den der Punkt ξ, η durch die Drehung übergeführt wird, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= e^{i\varphi}\,\xi \\ \eta' &= e^{-i\varphi}\,\eta \end{aligned}\right\}$$

Hier ist $e^{i\varphi}$ eine reelle Grösse. Wir schreiben daher lieber folgendermassen:

$$\xi' = e^{-\psi}\,\xi = \varrho\,\xi$$

$$\eta' = e^{+\psi}\,\eta = \frac{1}{\varrho}\,\eta$$

Dieses sind die Gleichungen der Drehungssubstitution. Sie zeigen, dass die Drehung in der hyperbolischen Geometrie eine aperiodische, nicht wie in der gewöhnlichen oder elliptischen Geometrie eine periodische Operation ist.

Neben der Drehung betrachten wir die Operation der Spiegelung. Eine Spiegelung definiren wir als eine Drehung, verbunden mit einer Vertauschung von ξ und η. Die Transformationsgleichungen der Spiegelung werden also

$$\xi' = \varrho\,\eta$$

$$\eta' = \frac{1}{\varrho}\,\xi$$

Bei dieser Operation giebt es zwei gerade

Linien, welche ungeändert bleiben, nämlich die Linien

$$\frac{\xi}{\eta} = +\varrho \text{ und } \frac{\xi}{\eta} = -\varrho$$

Die erste dieser Linien geht bei der Spiegelung Punkt für Punkt in sich über. Wir haben nämlich unter m einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$\xi = m\varrho \qquad \xi' = m\varrho = \xi .$$
$$\eta = \varrho \text{ und daher } \eta' = \varrho = \eta$$

Die zweite Linie geht in der Weise in sich über, dass der Punkt ξ, η mit dem Punkte $-\xi, -\eta$ vertauscht wird. Zu den Minimalgeraden liegen diese beiden Linien harmonisch. Man überzeugt sich leicht, dass der so definirten Operation in der gewöhnlichen Geometrie die gewöhnliche Spiegelung, dass der ersten Linie die Spiegelungsaxe, der zweiten die darzu Senkrechte entspricht.

3. Parabolischer Fall. $b^2 - 4ac = 0$.

Im parabolischen Falle wird die Form $ax^2 + bxy + cy^2$ ein vollständiges Quadrat. Der Ausdruck für die Entfer-

nung wird daher hier linear in x und y

$$r = \pm (Ax + By) = \xi.$$

Die Minimallinien bestehen aus der doppelt zu zählenden Geraden $Ax + By = 0$. Die Entfernung eines Punktes p von O wird gleich einer Entfernung ξ von der Minimallinie. Die Entfernung zweier Punkte p und p' von einander ist gleich $\xi - \xi'$. Schalten wir noch beliebige andere Punkte $p_1 .. p_2$ ein, so wird jetzt die Entfernung p von p' gleich der Entfernung p von $p_1 + \ldots +$ der Entfernung p_2 von p', da

$$\xi - \xi' = \xi - \xi_1 + \xi_1 - \ldots\ldots - \xi_2 + \xi_2 - \xi'.$$

Wir kommen also zu dem paradoxen Resultat, dass die Weglänge zwischen zwei Punkten in der parabolischen Maassbestimmung unabhängig wird von dem zurückgelegten Wege und nur von der Lage des Anfangs- und Endpunktes abhängt. (Das Bogenelement ds erscheint als ein vollständiges Differential).

Wollen wir den Winkel zweier in O zu-
sammenlaufenden Geraden berechnen,
so müssen wir die zusammen-
fallenden Minimallinien des parabo-
lischen Falles als Grenzfall zweier
nicht zusammenfallender Linien auf-
fassen. Seien daher die Minimallini-
en zunächst

$$\xi = 0 \text{ und } \eta = \xi + \varepsilon\xi = 0.$$

Den Winkel definiren wir dann wie
früher durch:

$$\frac{i}{2} \lg\left(\frac{\xi}{\xi+\varepsilon\xi} \cdot \frac{\xi'+\varepsilon\xi'}{\xi'}\right),$$

wo nun ε eine zu Null abnehmende
Größe bedeutet. Wollen wir zu einer ver-
nünftigen Winkeldefinition kommen,
so müssen wir eine mit ε variable
Maaseinheit einführen. Wir schreiben
daher:

$$C\left\{\lg\left(1+\varepsilon\frac{\xi'}{\xi}\right) - \lg\left(1+\varepsilon\frac{\xi}{\xi}\right)\right\} = C\varepsilon\left(\frac{\xi'}{\xi'} - \frac{\xi}{\xi}\right)+\cdots$$

und setzen fest, daß $C\varepsilon$ gleich einer festen
Größe k sei. Unter dem Winkel verstehen
wir daher hier die Größe

$$k\left(\frac{\xi'}{\xi'} - \frac{\xi}{\xi}\right),$$

in welcher ξ und η den Abstand von der Minimallinie $\xi = 0$ und von einer Hülfsgeraden $\eta = 0$ bedeutet. Der Winkel wird jetzt eine algebraische Function der Coordinaten, während er früher eine transcendente war. –

Frei. d. 22. XI. Wir kehren nunmehr zur Zahlentheorie zurück und machen uns zunächst in arithmetischer Formulirung mit dem fundamentalen Problem aus der Theorie der binären quadratischen Formen, mit dem wir uns hier in erster Linie ausführlich beschäftigen müssen, dem „Aequivalenzproblem" bekannt. Es handelt sich um Folgendes: Gegeben seien zwei Formen

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$
$$f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2,$$

in welchen wir unter $x, y, \ldots,$ ganze Zahlen verstehen wollen, während wir die Coefficienten $a, b, c \ldots$ nicht ausschliesslich als ganzzahlig voraussetzen werden. Können diese Formen durch eine Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

mit reellen ganzzahligen Coefficienten von der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

in einander übergeführt werden? Wenn dieses der Fall ist, nennen wir die Formen f und f' aequivalent u. z. eigentlich oder uneigentlich aequivalent, je nachdem die Determinante der Substitution $+1$ oder -1 ist.

Eine Vorbedingung für die Aequivalenz beider Formen leiten wir aus der Betrachtung der Ausdrücke $b^2 - 4ac$ bez. $b'^2 - 4a'c'$ her. Ihr Vorzeichen entscheidet bekanntlich über die Realität der Wurzeln von $f = 0$ bez. $f' = 0$; sie werden daher als Discriminanten bezeichnet. Nun ändert aber unsere reelle Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ an der Realität der Wurzeln nichts. Sollen daher die Formen f und f' bei der Substitution identisch werden, so müssen sie von vornherein in dem Vorzeichen ihrer

Discriminanten übereinstimmen. Beide Formen gehören daher, falls sie aequivalent sind, gleichzeitig zu den elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Falle.

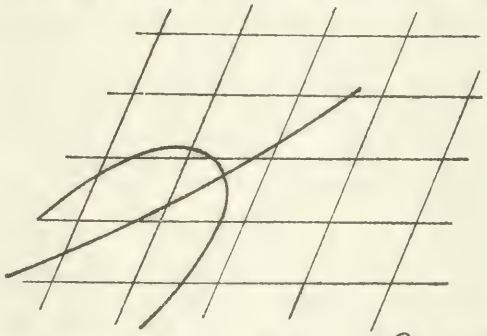
Die Invariantentheorie belehrt uns darüber hinaus, dass die Discriminante einer Form eine invariante Bildung ist, dass sie sich also bei einer linearen Substitution nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante ändert. Verstehen wir unter A, B, C die Coefficienten der transformirten Form, so wird nämlich

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

In unserem Falle $(\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1)$ bleibt also die Determinante völlig unge-ändert.

Die Gleichheit der Discriminanten von f und f' $b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c' = D$ ist daher jedenfalls eine notwendige Bedingung für ihre Aequivalenz. Damit ist aber die Frage noch lange nicht entschieden. Der Inhalt der fol-

genden Theorie ist es gerade, die feineren Kriterien anzugeben, welche ausserdem für die Aequivalenz erforderlich sind. Wir übertragen die Frage sogleich in's Geometrische. Wir ziehen uns zur Versinnlichung der Form f ein Gitter und betrachten dieses im Sinne der durch $f(x, y)$ indicirten Maassbestimmung. Um letzteres anzudeuten, zeichnen wir in das Gitter unseren Einheitskegelschnitt hinein, welcher nach Umständen eine Ellipse, Hyperbel oder ein Linienpaar sein kann. Das Gitter repräsentirt uns gewissermaßen den variablen Bestandteil unserer Form f, nämlich die Paare ganzer Zahlen x und y, der Kegelschnitt den festen Bestandteil, nämlich die Coefficienten a, b, c. Von dem Gitter kommen bei der sogleich zu nennenden affinen



Transformation nur die Gitterpunkte, nicht die Gitterstäbe in Betracht. Wir meinen im Folgenden daher nicht ein Parallel- sondern nur, ein Punktgitter.

Ein zweiter gleichfalls mit einem Kegelschnitt verrechenes Gitter stellt unsere zweite Form f' dar. Die Frage ist nun einfach: Sind die beiden so entstehenden Figuren affin verwandt, d. h. kann durch dieselbe affine Transformation erreicht werden, dass die Gitter und gleichzeitig die Kegelschnitte beider Figuren zur Deckung kommen?

Von vornherein ist klar, dass jedes Gitter in jedes andere und ebenso, dass jeder Kegelschnitt in jeden anderen durch affine Transformation verwandelt werden kann. Indem wir das eine oder andere an unseren Figuren vorweg thun oder nicht thun, können wir unsere Frage geometrisch in 3 verschiedene Formulirungen bringen.

I. Gegeben 2 Gitter und 2 Kegelschnitt

te. Giebt es eine affine Transformation, welche Gitter in Gitter und gleichzeitig Kegelschnitt in Kegelschnitt überführt?

II. Gegeben ein Gitter und 2 Kegelschnitte. Gesucht eine affine Transformation, welche das Gitter ungeändert läßt und den einen Kegelschnitt in den anderen überführt.

III. Gegeben 2 Gitter und ein Kegelschnitt. Es handelt sich darum durch eine affine Transformation, welche den Kegelschnitt (und natürlich seinen Mittelpunkt O) ungeändert läßt, das eine Gitter in das andere zu verwandeln. Eine solche Transformation ist aber im Sinne der durch den Kegelschnitt repraesentirten Maaßbestimmung eine Bewegung; sie ist genauer gesagt, eine Drehung, wenn sie die Determinante +1, eine Spiegelung, wenn sie die Determinante −1 hat. Im Falle der „Aequivalenz" müssen also unsere 2 Gitter bei dieser Art

der Fragestellung im Sinne der betr. Maafsbestimmung congruent sein, u. zw. entweder direct oder spiegelbildlich congruent. Wir sehen uns also eigentümlicher Weise hier in der Zahlentheorie vor dieselbe Frage geführt, mit welcher die elementare Geometrie anhebt, nämlich vor diese: wann sind zwei Figuren congruent?

Die verschiedenen Richtungen, in denen wir das vorliegende Problem unter I, II und III in Ansatz bringen, entsprechen genau den allgemeinen Formulirungen in §. 1, 2 meines Erlanger Programms. Es war mir damals nur nicht bekannt, dass eben jene Ideen auch in der Zahlentheorie fruchtbar sein könnten. Wenn man von der üblichen, algebraischen Geometrie ausgeht, so kommt man leicht dazu, als einziges Object der geometrischen Untersuchung die continuirlichen Curven anzusehen, oder doch nur solche Gebilde, welche aus einer endlichen Zahl discreter Bestandteile

bestehen. Ein ebenso interessantes Forschungsgebiet für den Geometer bilden aber ersichtlich auch Gebilde aus unendlich vielen discreten Bestandteilen wie unser Punktgitter. Sobald man nur diese mit berücksichtigt, erlangen die Begriffsbildungen der Geometrie sofort auch in der Arithmetik auch ihre Bedeutung, es verschwindet überhaupt der specifische Gegensatz zwischen beiden Gebieten.

Da die III. Formulirung des Aequivalenzproblemes eine besonders anschauliche war, werden wir im Folgenden diese vor dem andern bevorzugen. Wir wollen zusehen, wie in diesem Falle die Elementarfigur des Coordinatensystems gestaltet ist, wie wir also den Einheitsvector der x- und y- Axe zu wählen haben, damit der gerade hingezeichnete Kegelschnitt die Gleichung

$$f = a x^2 + b x y + c y^2 = 1$$

bekommt. Dem Punkte $x=1$, $y=0$ entspricht als Entfernung von 0:

$$r = \sqrt{a}$$

dem Punkte $x=0$, $y=1$ ebenso:

$$r = \sqrt{c};$$

der Winkel der beiden Einheitsvectoren ferner wird nach pg. 61. gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{b}{2\sqrt{ac}}.$$

Alle 3 Größen sind natürlich im Sinne der durch den hingezeichneten Kegelschnitt gegebenen Maassbestimmung zu verstehen; durch Angabe dieser 3 Größen ist das Gitter bis auf das willkürlich zu wählende Azimuth des x-Vectors festgelegt.

Der Inhalt des Elementarparallelogramms berechnet sich in unserer Maassbestimmung ebenso wie in der gewöhnlichen durch die Formel:

$$\sqrt{ac}\,\sin\varphi = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{2}} = \sqrt{-\frac{D}{2}}$$

Sollen unsere beiden zu f und f' gehörigen Gitter im Sinne des Ansatzes

III durch Bewegung zur Deckung ge„
bracht werden können, so müssen sie
von vornherein jedenfalls flächengleiche Elementarparallelogramme ha„
ben; denn ihr Inhalt bleibt bei der
Bewegung und andererseits bei beliebig geänderter Auswahl des Elementar„
parallelogramms ungeändert.

Die Gleichheit von D, welche wir be„
reits oben auf Grund der Invariantenna„
tur der Discriminante constatirten, er„
weist sich hiernach auch geometrisch
als eine nothwendige Vorbedingung für
die Möglichkeit der „Aequivalenz."

Specielle und in der Literatur vor„
kommende Fälle unserer Kegelschnitt-Git„
ter-Figur sind diese:
Im elliptischen Falle, wir legen statt
der Ellipse einen Kreis zu Grunde,
dann bedeuten $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$ und $\frac{b}{2\sqrt{ac}}$ Seiten„
längen und Winkelgrößen der Ele„
mentarfigur in gewöhnlicher Maaß„
bestimmung. Lassen wir dann noch
den Kreis als etwas Selbstverständli„
ches weg, indem wir momentan von

der Möglichkeit einer Pseudomaass-bestim-
mung absehen, so erhalten wir diejenige
Gitterfigur, welche bereits bei Gauss 1831
in seiner Besprechung eines Buches
von Lieber (Vergl. Werke Bd. II) vorkommt
und welche den Ausgangspunkt für
alle späteren arithmetisch-geometrischen
Untersuchungen bildet.

Im hyperbolischen Falle, wir mögen
hier etwa die Einheits-Hyperbel als gleich-
seitig annehmen. Die so entstehende
Figur: gleichseitige Hyperbel mit einge-
zeichnetem Gitter, findet sich bei
Selling (Vergl. Crelle Bd. 77, 1874),
allerdings in wesentlich anderer Ge-
dankenverbindung.

Frei. d. 29. XI. Wir haben nun das Aequivalenz-
problem im elliptischen, hyperbolischen
und parabolischen Falle zu studiren, wo
die Verhältnisse jedesmal sehr verschie-
den liegen. Allen drei Fällen gemeinsam
ist nur dieses, dass sich die Unter-
suchung wesentlich auf die Um-
riss-polygone, oder, wie man es gewöhn-
lich arithmetisch ausdrückt, auf die

Kettenbruchentwickelung stützt. Da der parabolische Fall meistenteils vernachlässigt wird, wollen wir gerade mit diesem beginnen, und nachher auf den hyperbolischen und elliptischen Fall kommen, (indem wir also auch hier die gewöhnliche Reihenfolge umkehren).

2. Das Aequivalenzproblem im parabolischen Falle.

Die parabolische Entfernung war

$$r = \sqrt{f} = Ax + By$$

Bei der Construction der (zusammenfallenden) Fundamentalstrahlen.

$$Ax + By = 0$$

ergibt sich eine wesentliche Fallunterscheidung, je nachdem A und B kommensurabel oder inkommensurabel sind. Im ersten Falle giebt es auf der Fundamentallinie unendlich viele, im zweiten Falle gar keine Gitterpunkte (ausser 0). Die Frage nach der Aequivalenz zweier Formen wird nun allemal so beantwortet, dass man die gegebenen Formen in eine gewisse, eindeutig definirte Normalform bringt oder wie man

es in der Zahlentheorie seit Lagrange ausdrückt, dass man zu den gegebenen Formen reducirte Formen construirt.

Je nachdem diese übereinstimmen oder nicht, sind die gegebenen Formen äquivalent oder nicht. Diese Methode ist Ihnen von der Geometrie her durchaus geläufig. Wenn Sie z. B. entscheiden wollen, ob zwei analytisch gegebene Kegelschnitte geometrisch identisch sind, können Sie doch so verfahren, dass Sie beide Kegelschnitte etwa auf die Hauptaxen transformiren. Sind die transformirten Gleichungen identisch, so waren es die Kegelschnitte auch vor der Transformation; sind sie verschieden, so sind auch die Kegelschnitte gewiss verschieden.

1ter Fall Wenn A und B commensurabel sind, so ist die Herstellung einer Normalform sehr leicht. Wir können dann nämlich den Ausdruck für r folgendermaßen schreiben:

$$r = m(\alpha x + \beta y),$$

wo α und β teilerfremde ganze Zahlen,

m eine geeignete rationale Zahl ist. Zu den Zahlen α und β wissen wir zwei andere Zahlen γ und δ zu finden von der Beschaffenheit, dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

wird. Machen wir nun die affine Transformation

$$x' = \alpha x + \beta y \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$
$$y' = \gamma x + \delta y$$

so ergibt sich als reducirte Form die folgende:

$$r = m x.$$

Sei ferner eine zweite parabolische Form f' gegeben, für welche

$$r' = \sqrt{f'} = A' x' + B' y'.$$

Durch eine neue Transformation $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$ bringen wir auch r' in die Form

$$r' = m' x'.$$

Das Resultat dieser Betrachtung ist folgendes:

<u>Zwei parabolische Formen f und f' sind dann und nur dann aequivalent, wenn ihre Multiplicatoren m und m' übereinstimmen.</u>

Die Kettenbrüche (Umrisspolygone)

kamen hierbei nur insofern zur Geltung, als wir mit der diophantischen Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ zu thun hatten.

2.ter Fall. Wenn A und B incommensurabel sind, so schreiben wir den Ausdruck für x folgendermassen:

$$x = A(x - \omega y),$$

wo $\omega = -\frac{B}{A}$ eine irrationale Zahl ist. Eine zweite Linearform sei

$$x' = A'(x' - \omega' y').$$

Sollen x und x' aequivalent sein, so müssen jedenfalls auch die zugehörigen Werte von ω und ω' untereinander durch eine lineare Transformation $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ zusammenhängen, auch diese müssen, wie wir kurz sagen, aequivalent sein. Eine notwendige Bedingung für die Aequivalenz beider Formen ist daher die Gleichung:

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

Im vorhergehenden Falle commensurabler A, B ist dieser Ansatz von Hause aus möglich und eben darum gar nicht zur Sprache gekommen.

Um zu entscheiden ob diese Bedingung erfüllt ist, markiren wir uns in der x, y Ebene sowohl wie in der x', y' Ebene die Gitter der ganzzahligen Punkte und legen durch sie die beiden ω - Linien hindurch

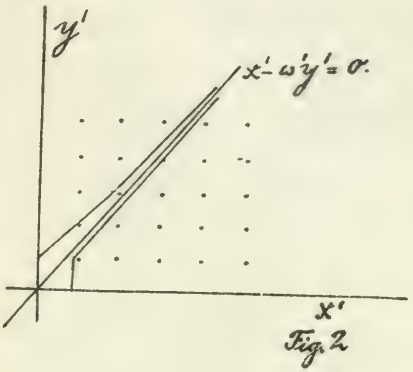


Fig. 2

$$x - \omega y = 0 \text{ und } x' - \omega' y' = 0$$

Die Frage ist nun: Können diese beiden Figuren durch Parallelprojection zur Deckung gebracht werden? Dabei kommt es lediglich darauf an, die Punktgitter und die ω - Linien in einander überzuführen. die Coordinatenaxen, welche nichts mit der Aequivalenzfrage zu thun haben, dürfen auch nach der Transformation verschieden sein.

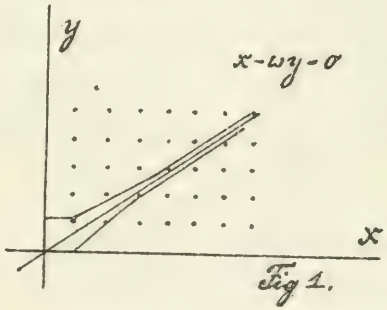
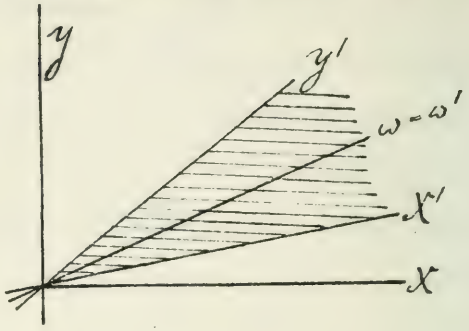
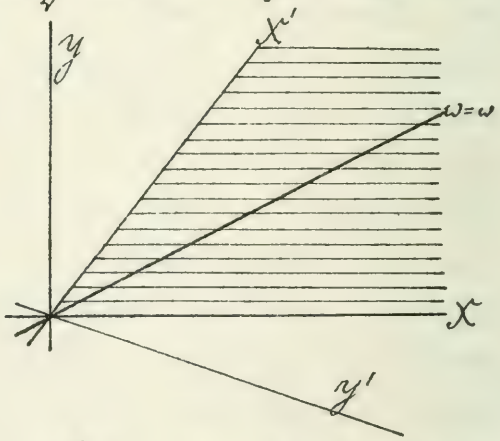


Fig 1.

Nehmen wir an, es sei uns diese Überführung gelungen. Dann entsteht eine „Doppelfigur" mit vereinigt gelegenen w- Linien und Punktgittern, bei welcher wir noch 4 verschiedene Möglichkeiten unterscheiden können, je nachdem die positive x'- Axe oder die positive y'- Axe in das Innere des ersten Quadranten der x, y- Ebene zu liegen kommt, oder nicht. Gleichviel, welcher von diesen Fällen vorliegen möge, so giebt es jedenfalls ein Gebiet, welches gleichzeitig dem positiven x, y- Quadranten und dem positiven x' y'- Quadranten angehört. In der ersten Figur ist es beispielsweise der von der x'- und y'- Axe, in der zweiten





der von der x'- und x-Axe eingeschlossene schraffirte Sector.

Nun construiren wir im ersten Quadranten der x, y-Ebene und im ersten Quadranten der x', y'-Ebene die Umrisspolygone (vergl. die Figuren der Seite 97), welche die w-Linie und die w'-Linie umgeben. Dieselben sind, wie wir wissen, durch die Lage dieser Linien im Punktgitter völlig bestimmt. In unserer Doppelfigur, wo die w-Linien und die Punktgitter zusammenfallen, werden daher auch die Umrisspolygone identisch, soweit sie im schraffirten Gebiete liegen.

Diese Thatsache haben wir jetzt in's Arithmetische zu übersetzen, indem wir an die zu den Umrisspolygonen gehörigen Kettenbruchentwickelungen denken. Die Teilnenner $\mu_1, \mu_3, \mu_5 \ldots \mu_2, \mu_4, \mu_6 \ldots$ des Kettenbruchs haben in der Figur des Umrisspolygons ihre bestimmte Bedeutung. Wenn also, wie wir sahen, die Umrisspolygone von w und w'

von einer gewissen Stelle ab zusammen„ fallen, so müssen auch die Teilnenner in den beiderseitigen Kettenbruchentwicke„ lungen von einer gewissen Stelle ab ihrer Größe und ihrer Aufeinanderfolge nach über„ einstimmen. Wir kommen daher zu dem folgenden Resultat:

Sollen zwei irrationale Größen ω und ω' aequivalent sein, so ist dazu jeden„ falls erforderlich, daß ihre Kettenbrüche von einer bestimmten Stelle ab iden„ tisch werden.

Man erkennt aber auch leicht, daß diese Bedingung hinreichend ist. Es seien nämlich die Kettenbruchent„ wickelungen

$$\omega = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \ldots + \frac{1}{\mu_r + \frac{1}{\Omega}}}, \qquad \omega' = \mu_1' + \frac{1}{\mu_2' + \ldots + \frac{1}{\mu_r' + \frac{1}{\Omega'}}};$$

dann haben wir, wie früher (pag 10), die Bezeichnung:

$$\omega = \frac{p_r \Omega + p_{r-1}}{q_r \Omega + q_{r-1}}, \qquad p_r q_{r-1} - q_r p_{r-1} = (-1)^r$$

Die Gleichung besagt, daß ω und Ω

aequivalent sind. Ebenso sind auch ω und $\Re'$ aequivalent. Setzen wir nun voraus, dass die Kettenbrüche von einer gewissen Grenze ab übereinstimmen, dass etwa $\Re = \Re'$ wird, so folgt daraus sofort, dass ω und ω' unter einander aequivalent sind. Die Determinante der affinen Substitution $\omega = S(\omega')$ ist dabei gleich dem Producte aus den Determinanten der Substitutionen $\omega = S_1(\Re)$ und $\omega' = S_2(\Re')$; sie ist also gleich $(-1)^{r+r'}$. Danach sind ω und ω' eigentlich aequivalent, wenn r und r' gleichzeitig gerade oder ungerade sind; sie sind uneigentlich aequivalent, wenn eine der Zahlen r und r' gerade, die andere ungerade ist.

Ersteres findet in Figur 1 von pg. 98. statt. Wenn hier nämlich der erste Eckpunkt der Polygonzüge, welcher in das schraffirte Gebiet fällt, rechts von ω liegt, so sind r und r' beide gerade, wenn er links von ω fällt, so sind r und r' beide ungerade.

Letzteres findet in Figur 2 statt. Denn hier gehört zu dem ersten Eckpunkt, welcher in das schraffirte Gebiet fällt, ein gerades r und ein ungerades r' oder ein ungerades r und ein gerades r'. Allgemein werden w und w' eigentlich oder uneigentlich aequivalent werden, je nachdem der Sinn, in dem die Geraden x, w, y und die Geraden x', w', y' auf einander folgen, der gleiche oder der entgegengesetzte ist.

Wir haben schliesslich anzugeben, welche weitere Bedingung zu der Aequivalenz der Zahlen w und w' hinzukommen muss, damit auch die Linearformen r und r' aequivalent werden. Durch Umkehrung der Substitution $w = S(\Omega)$ von pag. 101 ergiebt sich

$$\Omega = \frac{-w q_{r-1} - p_{r-1}}{w q_r - p_r}$$

oder wegen der ursprünglichen Bedeutung von w

$$\Omega = -\frac{A p_{r-1} + B q_{r-1}}{A p_r + B q_r}$$

Ebenso wird

$$\mathfrak{R}' = -\frac{A' p'_{r'-1} + B' q'_{r'-1}}{A' p'_{r'} + B' q'_{r'}}$$

Ist nun $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$, so können wir zunächst nur schliessen

$$\frac{A p_{r-1} + B q_{r-1}}{A p_r + B q_r} = \frac{A' p'_{r'-1} + B' q'_{r'-1}}{A' p'_{r'} + B' q'_{r'}} .$$

Die Nenner dieses Ausdruckes bedeuten die Werte der Linearformen r und r' im Punkte (r). Sollen die Formen aequivalent sein, so müssen diese Werte übereinstimmen. Stimmen aber die Nenner (oder die Zähler) jenes Ausdruckes überein, so folgt auch für alle folgenden Näherungspunkte die Gleichheit von r und r'.

Wir erkennen daraus: <u>Sind ω und ω' aequivalent, so sind es auch die Linearformen r und r', vorausgesetzt, dass sie in einem der zugehörigen gemeinsamen Näherungspunkte denselben Wert haben.</u>

3. Das Aequivalenzproblem im hyperbolischen Falle.

Wir betrachten eine Form vom hyper-

bolischen Typus

$f = ax^2 + bxy + cy^2$, wo $b^2 - 4ac > 0$.

Die Coëfficienten a, b, c lassen wir zunächst beliebig, wir werden dann später um so besser verstehen, welche besonderen Verhältnisse im ganzzahligen Falle statt haben.

Die Wurzeln der Gleichung $f = 0$ liefern uns die Fundamentalstrahlen $x/y = w_1$ und $x/y = w_2$. Von den drei Fällen, die hier zu unterscheiden wären: beide Zahlen w_1 und w_2 rational, — eine Zahl rational, die andere irrational, — beide Zahlen irrational, wollen wir nur den letzten berücksichtigen. Übrigens scheidet, wenn die Coëfficienten ganzzahlig sind, der zweite Fall von selbst aus, während sich der dritte Fall dahin specialisirt, daß die beiden irrationalen Zahlen conjugirte Irrationalitäten werden.

Eine zweite Form sei:

$f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$,

dieselbe liefere gleich Null gesetzt die beiden Wurzeln w_1' und w_2'.

Wir construiren uns in der x, y-und in der x', y'- Ebene die Linien ω_1, ω_2 und ω_1', ω_2' und markiren ausserdem die Punktgitter. Sollen die so entstehenden Figuren affin verwandt sein, so müssen ausser den Punktgittern auch die ω - Geraden paarweise in einander übergehen. Es müssen also Gleichungen folgender Art bestehen:

$$\omega_1 = \frac{\alpha \omega_1' + \beta}{\gamma \omega_1' + \delta}$$

$$\omega_2 = \frac{\alpha \omega_2' + \beta}{\gamma \omega_2' + \delta}$$

Eine solche Gleichung zwischen zwei Grössen ω besteht, wie wir im vorigen Falle sahen, dann, wenn die Kettenbruchentwicklungen von einer gewissen Stelle ab übereinstimmen. Vorausgesetzt, dass dies bei den Paaren ω_1, ω_1' und ω_2, ω_2' einzeln statt hat, so können die Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, durch welche die beiden ω zusammenhängen, noch verschieden ausfallen. Für die vorliegende Frage aber müssen wir den letztgenannten Gleichungen ent-

sprechend, verlangen, daß die beiden w- Linien nebst den Punktgittern durch ein und dieselbe affine Transformation in einander übergehen. Wir sind daher auf ein neues Hilfsmittel angewiesen, das uns die Kettenbruchentwickelungen von w_1 und w_2 / bez. von w_1' und w_2' / in Verbindung setzt.

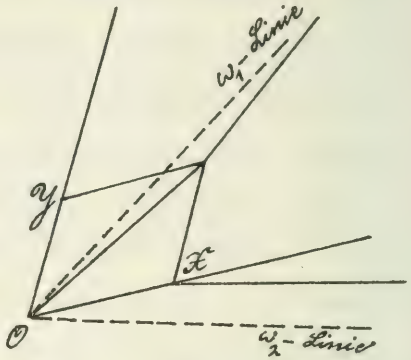
Da bemerken wir, daß die Abgrenzung des Punkthaufens im parabolischen Falle durch die w- Linie einerseits und durch eine Coordinatenaxe andererseits nur eine künstliche war, welche nicht aus dem Wesen unserer Figuren hervorging. Im hyperbolischen Falle, wo wir zwei w- Linien haben, liefern uns diese selbst eine natürliche Begrenzung. Wir werden unsere Umrißpolygone daher jetzt ohne Rücksicht auf die Coordinatenaxen construiren können und einfach alle diejenigen Gitterpunkte durch ein Umrißpolygon eingrenzen, welche einem der vier durch die w- Linien gebildeten Quadranten angehören. So bekommen wir vier natürliche Umrißpolygone, welche sich beiderseitig in's Un-

endliche erstrecken und übrigens paarweise einander gleich werden. Solche Umrisspolygone haben wir in der x, y-Ebene und in der x', y'-Ebene. Sollen die Figuren der beiden Ebenen affin verwandt sein, so müssen diese natürlichen Umrisspolygone in einander projizirt werden können.

v. d. 5. XII. Wir beschäftigen uns im Folgenden mit dem geometrischen Studium der natürlichen Umrisspolygone, wobei wir bequemer Weise an die bereits untersuchten Eigenschaften der Kettenbruchpolygone anknüpfen werden. Da von den 4 Polygonen je zwei mit einander congruent sind, brauchen wir nur von 2 Polygonen zu sprechen (die wir vorübergehend P und P' nennen).

Wir beginnen damit ein für unsere Betrachtung geeignetes Coordinatensystem zu definiren. Wir wählen als Einheitsvector der x-Axe die Strecke von O nach irgend einem Gitterpunkte auf einem der beiden Umrisspolygone (sagen wir auf P). Schreiten wir

von diesem Punkte aus längs einer Polygonseite von P fort, so kommen wir auf dieser sicher noch zu einem zweiten Gitterpunkte. Zur Verbindungsstrecke von jenem nach diesem Gitterpunkte ziehen wir durch O eine Parallelstrecke. Der Endpunkt der letzteren



fällt gleichfalls auf einen Gitterpunkt, u. zw. auf einen Gitterpunkt des Umrisspolygones P'. Diese Parallelstrecke wählen wir als Einheitsvector der y-Coordinate. Es zeigt sich, dass das von diesen Einheitsvectoren bestimmte Parallelogramm in seinem Innern keinen Gitterpunkt enthalten kann. Für die eine (in der Figur schraffirte) Hälfte des Parallelogramms ist dieses nach den Eigenschaften der Umrisspolygone evident. Wegen der Symmetrie der Gitterfigur kann dann aber auch die andere (nicht schraffirte) Hälfte einen Git-

terpunkt in ihrem Innern nicht enthalten. Das so definirte Coordinatensystem besitzt daher ein Elementarparallelogramm vom Flächeninhalte $\frac{1}{4}$; es ist ein Elementarcoordinatensystem. Ausserdem besitzt es die für das folgende wesentliche Eigenschaft, dass seine Axen durch die w-Linien der indefiniten Form getrennt werden. Da nämlich der x-Vector auf dem einen, der y-Vector auf dem anderen Umrisspolygon der w-Linien endigt, so liegt die eine Fundamentallinie (w) im ersten, die andere (w_2) im zweiten Quadranten des x, y-Systems. Sind die Gleichungen der beiden Geraden in unserem Coordinatensystem

$$\frac{x}{y} = \Omega_1 \text{ und } \frac{x}{y} = \Omega_2$$

so haben in Folge dessen Ω_1 und Ω_2 verschiedene Vorzeichen. Jedes Coordinatensystem, für welches dieses zutrifft, nennen wir ein <u>reducirtes Coor-</u>

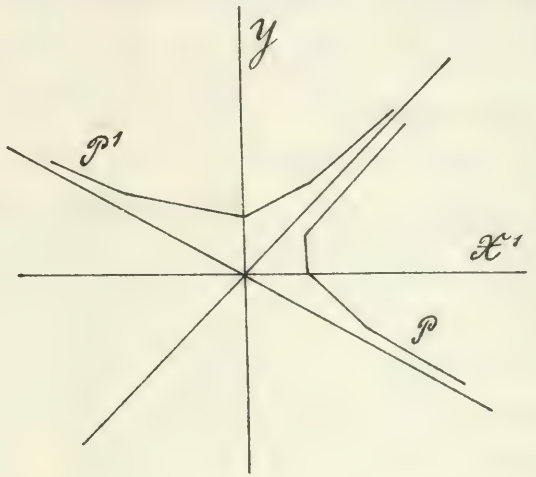
dinatensystem. desgleichen bezeichnen wir unsere hyperbolische Form, nachdem wir sie auf ein solches Coordinatensystem transformirt haben, als reducirte Form. Ist

$$F = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

eine reducirte Form, so folgt aus dem ungleichen Vorzeichen der Wurzeln von $F = 0$ unmittelbar, dass die Coefficienten A und C ihrerseits ungleicher Vorzeichen besitzen. Umgekehrt hat auch jede indefinite Form, in welcher A und C verschiedenes Vorzeichen haben, zwei Wurzeln von entgegengesetztem Zeichen. Wir können daher die Definition der reducirten Form hier kurz folgendermaßen fassen: Eine reducirte Form ist eine solche, für welche $AC < 0$ ist.

Die Beziehung zwischen den natürlichen Umrisspolygonen und den Polygonzügen der zu den Fundamentallinien gehörigen Kettenbruchentwickelungen gestaltet sich in einem reducirten Coordinatensystem besonders einfach. Entwickeln wir nämlich R_i in einen Kettenbruch, so erhalten wir zwei Polygonzüge, welche nach der früher gegebenen

independenten geometrischen Construc„
tion jener Polygonzüge notwendiger
Weise Teile unserer natürlichen Um„
rißpolygone $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ sind. Es sind
nämlich die im
ersten Qua„
dranten des
x, y- Systems
gelegenen
Stücke von
$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$.
Entwickeln
wir ferner
Ω_2 in einen
Kettenbruch,
so sind zu,



gehörige Polygonzüge dieser Kettenbruchs
die übrig bleibenden Teile der natürli„
chen Umrißpolygone, nämlich die im
2ten und 4ten Quadranten gelegenen
Stücke von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$. In einem redu„
cirten Coördinatensystem setzen sich
also die natürlichen Umrißpolygone aus
den Kettenbruchpolygonen der Wurzeln
Ω_1 und Ω_2 direct zusammen. Bei

einem nicht reducirten Coordinatensys-
tem liegen die Verhältnisse nicht ganz
so einfach.

Daraufhin übertragen sich die Eigenscha-
ften der Kettenbruchpolygone von $\mathfrak{R}_1$ und
$\mathfrak{R}_2$ ohne Weiteres auf die natürlichen Um-
rißpolygone. Wir heben die folgenden
Punkte hervor:

1. Zu jeder Seite des einen Polygonzu-
ges (P) gehört eine bestimmte Ecke des an-
deren (P'). Wir haben nämlich bei der Con-
struction der Kettenbrüche die Seite $(r-1)(r+1)$
dadurch erhalten, daß wir durch $(r-1)$
eine Parallele zu dem Vector $0(r)$ zogen.
Der Punkt (r) ist daher der Seite $(r-1)$-$(r+1)$
eindeutig zugeordnet, wir bezeichnen ihn
als den jener Seite „gegenüberliegenden"
Eckpunkt.

2. Die Seite $(r-1)$-$(r+1)$ brauchte dabei nicht
gerade die Länge des Vectors $0(r)$ zu be-
sitzen. Sie konnte auch ein ganzzahliges
(u-faches) Multiplum jener Vectors sein.
In dieser Weise gehörte zu jeder Seite der
Kettenbruchpolygone eine ganze Zahl u,
welche gleich der um 1 vermehrten

Anzahl der Nebenpunkte im Innern der Seite war. Dementsprechend gehört auch zu jeder Seite unserer natürlichen Umrisspolygone eine ganze Zahl μ. Wir versehen diese Zahlen in der Weise mit Indices, dass sich die Zahlen μ_r mit ungeradem Index auf die Seiten von P, die mit geradem Index auf die Seiten von P' beziehen. Dadurch bekommen wir zwei Reihen beiderseitig in's Unendliche verlaufender ganzer Zahlen, welche so wie die Reihen der geraden und ungeraden Zahlen in ihrer natürlichen Folge geordnet sind:

$$\ldots \mu_{-3}, \mu_{-1}, \mu_1, \mu_3, \ldots$$
$$\ldots, \mu_{-2}, \mu_0, \mu_2, \mu_4, \ldots$$

3. Wir können diese Zahlenreihen an sich ganz beliebig annehmen und dadurch die Lage der Geraden willkürlich R_1 und R_2 festlegen. In der That setzen sich aus jeder solchen Zahlenreihe zwei Kettenbrüche zusammen, durch welche immer ein und nur ein Wertepaar R_1 und R_2 bestimmt wird.

Wir gehen nun dazu über, diese Ideen für das Aequivalenzproblem der indefiniten Formen zu fructifiziren. Der genaueren Durchführung stellen wir zunächst eine kurze Übersicht der abzuleitenden Resultate voraus:

1. Von einer vorgelegten indefiniten Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

gelangen wir zu einer reducirten Form

$$F = Ax^2 + BXY + CY^2$$

durch Einführung eines reducirten Coordinatensystems, indem wir den Einheitsvector Ox nach einem Gitterpunkt einer beliebigen Polygonecke von P, den Einheitsvector OY nach dem gegenüberliegenden Eckpunkte von P' ziehen.

2. Diese Einführung ist auf sehr verschiedene Arten möglich. Es gehört daher zu einer indefiniten Form f eine ganze Serie reducirter Formen F. Dabei erhalten wir die ganze Serie aus einer einzelnen reducirten Form, indem wir den X- und den Y-Vector in gesetzmäßiger Weise alternirend

längs den Seiten der Umrißpolygone entlang schreiben.

3. Die Bedingung für die „Aequivalenz" zweier gegebener indefiniter Formen besteht dann einfach darin, daß die Serien der reducirten Formen oder auch nur irgend ein Paar reducirter Formen aus den beiderseitigen Serien übereinstimmen muß.

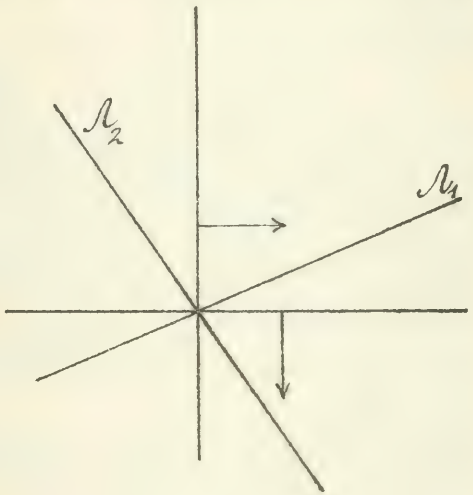
d. 6. XII. Wir beginnen mit einigen Details über die reducirten Formen. Als Kennzeichen für eine reducirte Form fanden wir die Ungleichung $AC < 0$. Wir können es dabei noch so einrichten, daß speciell $A > 0$ und $C < 0$ wird. Ist nämlich das Umgekehrte der Fall, so brauchen wir nur die Benennung der x- und y- Vectors, und also auch die der Coefficienten A und C zu vertauschen, um auf die vorstehenden Ungleichungen zu kommen. Nach dieser Verabredung werden also die reducirten Formen stets in denjenigen durch die Ω_1- und Ω_2- Linie begrenzten Doppelvector positiv sein,

in welchem die x - Axe enthalten ist.
Wir machen sodann einen Unterschied zwischen Hauptreducirten und Nebenreducirten. Wir nennen eine Form hauptreducirt dann, wenn sowohl der x - wie der y - Vector ihres Coordinatensystems nach einem Hauptpunkte der Umrisspolygone verläuft, nebenreducirt dann, wenn einer dieser Vectoren in einem Nebenpunkte endigt. (Der andere Vector endigt dann sicher in einem Hauptpunkte, nämlich in demjenigen Gitterpunkte, welcher der Polygonseite des Nebenpunktes gegenüberliegt und welcher notwendig ein Endpunkt der anderen Umrisspolygones ist.)

Innerhalb der Haupt- und Nebenreducirten unterscheiden wir ferner noch je zwei Möglichkeiten a) und b). Wir betrachten zunächst die Hauptreducirten. Durch den Endpunkt des y- bez. x- Vectors geht je eine Seite der Umrisspolygone hindurch, welche parallel der x- bez. y- Axe verläuft.

Im Falle a) möge die Poly-

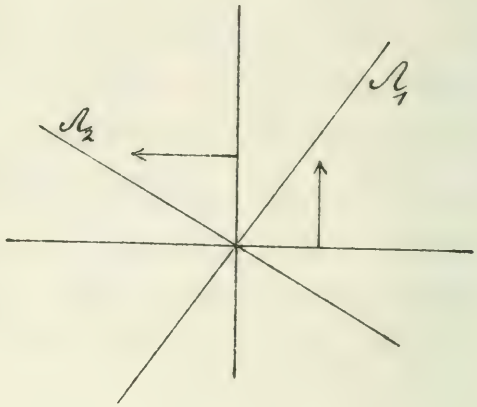
gonseite durch den Einheitspunkt auf der y-Axe nach dem ersten Quadranten hin verlaufen. Dann zieht die der y-Axe parallele Polygonseite im Einheitspunkte der x-Axe in den 4 ten Quadranten hinein. Wir zeichnen unser Coordinatensystem der Einfachheit halber als gewöhnliches rechtwinkeliger Coordinatensystem. Die Linie $\mathfrak{R}_1$ liegt dann notwendiger Weise zwischen der x-Axe und der Winkelhalbirenden des 2 ten Quadranten, die Linie $\mathfrak{R}_2$ zwischen der y-Axe und der Winkelhalbirenden des zweiten Quadranten. In diesem Falle ist



$|\mathfrak{R}_1| > 1$, $|\mathfrak{R}_2| < 1$.

Im Falle b) der Hauptreduirten möge die Polygonseite durch den Endpunkt

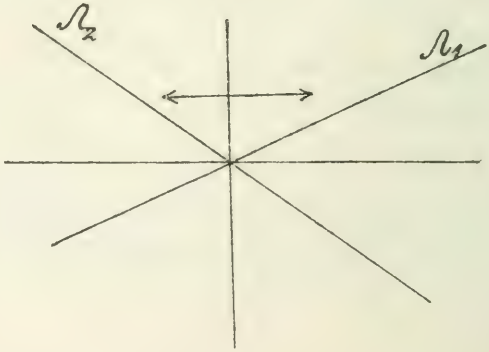
des y-Vektors in den 2. Quadranten hin-ein verlaufen. Dann weist die Polygon-seite im Einheits-punkt der x-Axe nach dem ersten Quadranten hin. Dementsprechend ändert sich die Lage der Linien $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$. Wir haben in diesem Falle:



$$|\mathfrak{L}_1| < 1 \quad , \quad |\mathfrak{L}_2| > 1 .$$

Bei den <u>Nebenreduzierten</u> ist einer der Einheitspunkte ein Nebenpunkt, d. h. ein innerer Gitterpunkt einer Polygonseite. Sei dieser <u>im Falle a)</u> der Einheitspunkt auf der y-Axe, <u>im Falle b)</u> der auf der x-Axe.

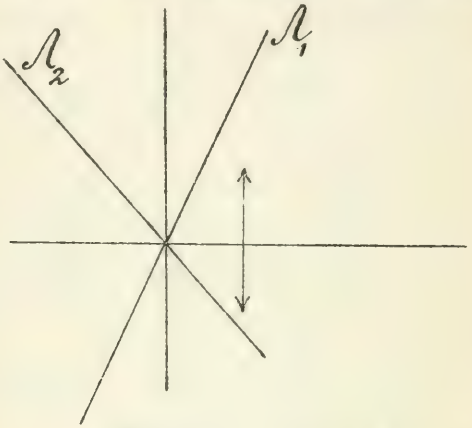
Im Falle a) verlaufen die $\mathfrak{L}$-Linien beide zwischen der (positiven bez. negativen) x-Axe und



den Winkelhalbirenden. In diesem Falle ist also

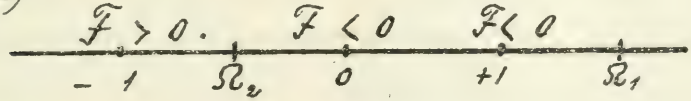
$$|\mathfrak{R}_1| > 1 \quad , \quad |\mathfrak{R}_2| > 1$$

Im Falle b) liegen die $\mathfrak{R}$-Linien zwischen der y-Axe und den beiden Winkelhalbirenden. Es wird daher $|\mathfrak{R}_1| < 1$, $|\mathfrak{R}_2| < 1$.

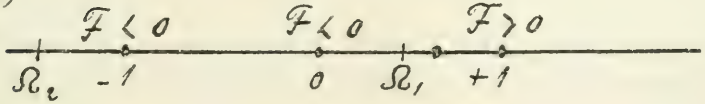


Um die Wurzelverteilung in den verschiedenen Fällen noch besser übersehen zu können, repräsentiren wir uns die möglichen Werte von x/y je durch eine besondere Gerade. Wir haben auf dieser die folgende relative Lage der Werte $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $+1$, 0, -1 gegen einander: im Falle der Hauptreducirten

a)

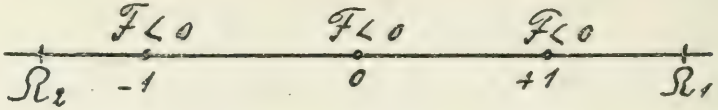


b)

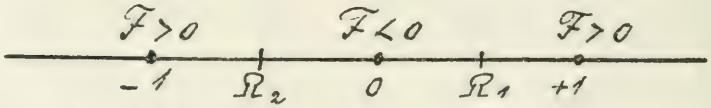


im Falle der Nebenreducirten

a)



b)



Wir tragen ferner in unsere Schemata Vorzeichen von F in den Punkten +1 und -1 ein. Da nach Verabredung F längs der x- Axe positiv, so ist es längs der y- Axe negativ. Dem Punkte x/y=0 kommt daher in allen 4 Fällen das negative Vorzeichen zu. Dasselbe Vorzeichen gilt auch nach beiden Seiten von 0 aus bis an die Stellen R_1, R_2 heran und geht jenseits derselben in das positive über. Danach ist es klar, welche Vorzeichen der Form an den Stellen +1 und -1 statt finden. Wir erkennen: <u>Unsere 4 Fälle sind durch diese Vorzeichen von einander unterschieden.</u>

Wir können hierauf sofort die <u>arithmetischen Kriterien</u> für unsere 4 Fälle hinschreiben. Wir erhalten nämlich,

indem wir $x = 1$, $y = 1$, bez. $x = -1$, $y = 1$ in F einsetzen, die folgenden Ungleichungen:

Im Falle der Hauptreduzirten

a)

$$\left|\begin{array}{l} A + B + C < 0, \\ A - B + C > 0, \end{array}\right.$$

b)

$$\left|\begin{array}{l} A + B + C > 0, \\ A - B + C < 0. \end{array}\right.$$

im Falle der Nebenreduzirten

a)

$$A \pm B + C < 0$$

b)

$$A \pm B + C > 0$$

Dazu kommen noch als allgemeingültige Bedingungen für reduzirte Formen die folgenden:

$$A > 0 \text{ und } C < 0.$$

In den arithmetischen Darstellungen unserer Theorie, wo diese Einteilung, wenigstens, was die Hauptreduzirten angeht, gleichfalls gemacht wird, erscheint sie als etwas sehr Willkürliches, während sie sich vom geometrischen Standpunkte aus auf dem hier eingeschla-

genen Wege ganz von selbst darbietet. Man möchte fast vermuten, daß Gauß selbst bei der Entdeckung dieser Dinge von geometrischen Anhaltspunkten geleitet worden ist und daß er diese, seiner bekannten (aber nicht nachahmenswerten) Publicationsmethode zufolge, späterhin absichtlich unterdrückt hat.

Wir untersuchen nun das Gesetz, nach welchem man aus einer reducirten Form die zugehörige unbegrenzte Reihe der übrigen reducirten Formen ableiten kann.

Wir nehmen an, es sei eine Hauptreducirte des Falles a) vorgelegt:

$$F = A_1 X_1^2 + B_1 X_1 Y_1 + C_1 Y_1^2$$

und wir sollen mit unserer Reihe an R_1 entlang schreiten. Liegt der Fall b) vor, so ist einfach X und Y zu vertauschen; sollen wir an R_2 entlang schreiten, so haben wir die ganze Reihe der Operationen umzukehren. Unser ursprüngliches reducirtes Coordinatensystem X_1, Y_1 ändern wir nun in gesetzmäßiger Weise so ab, daß es beständig ein reducirtes Coordinatensystem bleibt.

Wir beginnen damit, den y-Vector der x-Axe parallel um eine Einheit zu verschieben. Sein Endpunkt wandert dabei auf P' vergl. die erste Figur auf pag. 117. Analytisch bedeutet dieses, daß wir die Substitution

$$x_1 = x_1' + y_1'$$
$$y_1 = y_1'$$

ausüben, die wir früher als Substitution S bezeichneten. Unsere Form geht dabei über in

$$A_1 x_1'^2 + (2A_1 + B) x_1' \cdot y_1' + (A_1 + B_1 + C_1) y_1'^2,$$

welche neue Form nach den geometrischen oder auch nach den arithmetischen Kriterien der Falles a) sicher gleichfalls eine reducirte ist. Es kann aber sein, daß wir diese Verschiebung noch ein zweites Mal ausführen können, ohne daß unsere Form aufhörte, eine reducirte zu sein, dann vielleicht ein drittes Mal, etc. etc. Sei die größte Anzahl von Malen, daß dieses möglich ist, μ_1. Dann ist die durch die Substitution S^{μ_1} aus F abgeleitete Form

$$(A_1, 2A_1\mu_1 + B_1, A_1\mu_1^2 + B_1\mu_1 + C_1)$$

noch eine reducirte Form, ihr letzter Coefficient $A_1 \mu_1^2 + B_1 \mu_1 + C_1$ also noch negativ. Durch abermalige Ausübung der Substitution S dagegen wird eine Form entstehen, deren letzter Coefficient positiv ist. Denn wir würden bei nochmaliger Verschiebung des y-Vectors die $\mathfrak{R}$-Linie überschreiten. Die Zahl μ_1 können wir daher arithmetisch so definiren: Es ist die grösste ganze Zahl, für welche die Ungleichung besteht

$$A_1 \mu_1^2 + B_1 \mu_1 + C_1 < 0$$

Setzen wir nun

$$A_1 = A_2, \quad 2A_1 \mu_1 + B_1 = B_2, \quad A_1 \mu_1^2 + B_1 \mu_1 + C_1 = C_2,$$

so ist

$$(A_2, B_2, C_2)$$

wiederum eine haupttreducirte Form, aber eine b). Denn es ist jetzt

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 + B_2 + C_2 > 0 \\ A_2 - B_2 + C_2 < 0 \end{array} \right\}$$

Wir sagen, dass

(A_2, B_2, C_2)

auf die Haupttreducirte (A_1, B_1, C_1) bei der gewählten Fortschreitungsrichtung längs P' zuerst folgt.

Nun operiren wir in ähnlicher Weise

mit dieser Form (A_2, B_2, C_2), in dem wir nun die Rollen von x und y vertauschen. Wir verschieben den x-Vektor ihres Coordinatensystems (x_2, y_2) parallel der y_2-Axe um so viele Einheiten, als möglich, d. h. solange als die Form dabei reducirt bleibt, analytisch bedeutet dieses, daß wir die Substitution S':

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x'_2 \\ y_2 &= x'_2 + y'_2 \end{aligned}\right\} S'$$

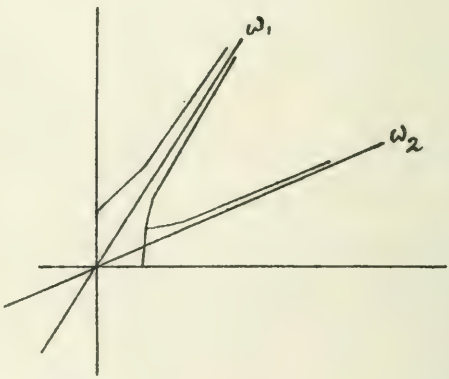
eine Anzahl von Malen (μ_2-mal) ausführen, wobei μ_2 diejenige größte ganze Zahl ist, für welche

$$A_2 + B_2\,\mu_2 + C_2\,\mu_2^2$$

noch positiv ist. Die Substitution S'^{μ_2} läßt dann aus (A_2, B_2, C_2) wiederum eine Hauptreducirte a) entstehen, welche wir mit (A_3, B_3, C_3) bezeichnen. An der neuen Hauptreducirten operiren wir in derselben Weise mit der Substitution S und bekommen so fortfahrend eine unbegrenzte Reihe von hauptreducirten Formen. Es ist ferner klar, daß wir diese Operationen von (A_1, B_1, C_1) ausgehend

auch nach rückwärts fortsetzen können und müssen. Auch nach dieser Richtung wird die Reihe der Hauptreduzirten eine unbegrenzte sein. Wir schreiten dann eben an R_2 entlang. Die Aufstellung der ganzen beiderseitig unendlichen Schaar von Formen ist hiermit erledigt, es handelt sich dabei, wie wir sehen, um eine ganz elementare Reihenvorschrift.

Wir haben noch als Ergänzung des Vorstehenden anzugeben, wie man von einer beliebigen Form f zu einer ersten reduzirten Form F gelangen kann. Wir wollen uns den Weg kurz an der Figur klar machen. Wir betrachten die zu den Wurzeln ω_1 u. ω_2 von $f=0$ gehörigen Kettenbruchentwickelungen. Ihre Umrisspolygone müssen von einer gewissen Stelle ab sich mit den



natürlichen Umrisspolygonen denken. Wenn wir also dasjenige Coordinatensystem, auf welches f ursprünglich bezogen ist, und welches wir als nicht reducirt voraussetzen wollen, längs der Umrisspolygone der Entwickelungen von ω_1 (oder auch von ω_2) in der durch den Kettenbruch indicirten Weise entlang schieben, so bringen wir es durch eine endliche Anzahl solcher Verschiebungen schliesslich in eine Lage, wo seine Einheitsvectoren in Eckpunkten von P und P' endigen, wo also das Coordinatensystem ein reducirtes geworden ist. Gleichzeitig ist dann aus f eine reducirte Form F entstanden. Der Unterschied gegen vorhin ist dabei dieser! Während wir von einer reducirten Form F zu neuen reducirten mittelst rationaler Kriterien fortschreiten konnten, mussten wir, wie wir gerade schilderten, zur Aufstellung einer ersten F die irrationalen Grössen ω, ω_2 selbst bez. ihre Kettenbrüche zu Hülfe nehmen. Es handelt sich eben zunächst noch darum, was bei einer reducirten F

von vorneherein gegeben ist, nämlich die Wurzeln von $f = 0$ zu separiren.

Do. d. 12. XI. Wir werden heute untersuchen, welche besonderen Verhältnisse eintreten, wenn wir die Annahme hinzunehmen, dass die gegebene indefinite Form eine ganzzahlige Form ist. Wir nehmen an, dass die Coefficienten der Form commensurabel sind und schreiben dementsprechend

$$f = M(ax^2 + bxy + cy^2),$$

wo a, b, c ganze Zahlen, M einen beliebigen Factor bedeutet. Von den Coefficienten a, b, c nehmen wir ferner an, dass sie teilerfremd sind, d. h. nicht alle drei einen gemeinsamen Factor besitzen. In diesem Falle nennen wir $ax^2 + bxy + cy^2$ eine primitive Form.

Das Resultat der letzten Stunde hinsichtlich der reducirten Formen lautete folgendermaßen: Zu jeder Form f giebt es eine beiderseits unbegrenzte Reihe von hauptreducirten Formen

$$F_1 = (a_1, b_1, c_1)$$

$$F_2 = (a_2, b_2, c_2)$$
$$F_3 = (a_3, b_3, c_3)$$

Ist F_1 eine Hauptreducirte der Fälle a) so sind es auch F_3, F_5, ..., während F_2, F_4, ... Hauptreducirte der Fälle b) sind. Diese Formen hängen wie die Glieder einer Kette untereinander zusammen; es wird nämlich $a_1 = a_2$, $c_2 = c_3$, $a_3 = a_4$ etc.

Da alle diese Formen unter sich und mit der gegebenen Form durch affine Substitutionen von der Determinante 1 zusammenhängen, so haben sie die gleiche Discriminante.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Sei $F = (A, B, C)$ eine beliebige Form aus der Reihe der reducirten. Da unserer Verabredung nach bei reducirten Formen $C < 0$, schreiben wir der Deutlichkeit halber $-C'$ statt C, setzen also

$$F = (A, B, -C').$$

wo jetzt C' und ebenso A positive Zahlen sind. Die Discriminante von F hat dann folgende Gestalt:

$$D = B^2 + 4AC.$$

Jetzt bringen wir unsere Voraussetzung zur Geltung, daß A, B, C, D ganze Zahlen und daß A, C, D positive Zahlen sind. Auf diese Voraussetzung gründen wir einen spezifisch zahlentheoretischen Schluß von übrigens äußerst einfachem Charakter. Wir denken nämlich D als feste Zahl gegeben und fassen die vorstehende Gleichung als diophantische Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten A, B, C auf. Wir können dann sofort sagen: es gibt nur eine endliche Anzahl von ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung mit positiven Werten von A und C. Um sie alle zu bekommen, können wir so verfahren: Wir setzen $B = 0, 1, 2 \ldots$. $E(\sqrt{D})$ (wo $E(\sqrt{D})$ die größte ganze Zahl $\leqq \sqrt{D}$ bedeutet) und sehen zu, ob $D - B^2$ durch 4 teilbar ist oder nicht. Im letzteren Falle hat die Gleichung sicher keine Lösung, im ersteren zerlegen wir $D - B^2$ auf alle mögliche Weise in Factoren.

So erhalten wir alle möglichen Werte von A, C' und B.

Das Resultat dieser Betrachtung ist der folgende wichtige Satz: Zu einer gegebenen Discriminante gehört nur eine endliche Anzahl reducirter Formen (A, B, C).

Nun hatten wir gelernt, aus einer Form eine unendliche Serie reducirter Formen

$$\ldots F_{-1}, F_0, F_1, F_2 \ldots$$

zu erzeugen. Da überhaupt nur eine endliche Zahl von solchen Formen zur Verfügung steht, muss eine Form in dieser Serie mehrmals vorkommen. Sei F_r diese Form, dann gibt es eine erste Form F_{r+l}, welche dieselben Coefficienten A, B, C hat, wie F_r. Nun entstand aus F_1 durch einen gewissen Process die ganze Reihe der Formen F. Sind wir bei diesem Process bis F_{r+l} gekommen, so haben wir, um zu F_{r+2} etc. zu kommen, mit F_{r+l} dieselben Operationen vorzunehmen, wie mit F_1. Wir werden daher beidemal dieselben Formen erhalten:

$F_{r+2} = F_2$, $F_{r+3} = F_3$, $\ldots$ $F_{2r+l} = F_{r+l} = F_1$

etc. Wir können auch von F_1 nach rück-

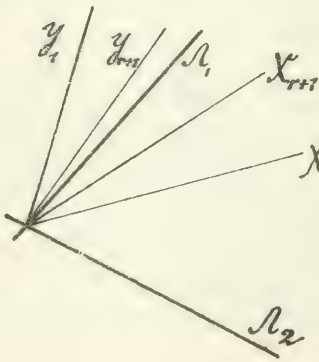
wärts gehen und finden auf dieselbe Weise $F_0 = F_r$, $F_{-1} = F_{r-1}$ etc. Daraus folgt: Die Serie der reduzierten Formen ist periodisch und besteht aus derselben immer fortgesetzten Wiederholung derselben r Formen.

Eine erste Bemerkung, die wir an diesen Satz knüpfen, bezieht sich auf das Aequivalenzproblem. Wir sagten, 2 Formen f und f' sind äquivalent, wenn die zu gehörigen Reihen der reduzirten Formen $F_{-1}, F_0, F_1 \ldots F'_{-1}, F'_0, F'_1 \ldots$ übereinstimmen. Um dieses zu entscheiden, können wir aus der einen Reihe eine Form (z. B. F_1) herausgreifen und zusehen, ob sich in der anderen Reihe eine Form $F' = F_1$ vorfindet. Darin liegt aber zunächst eine gewisse Schwierigkeit. Wenn wir nämlich eine Reihe von Formen F' berechnet und die Form F_1 darunter nicht angetroffen haben, so können wir daraus noch nicht schliessen, dass f und f' nicht äquivalent sind. Denn F_1 könnte ja gerade unter den noch nicht berechneten Formen F' vorkommen. Durch unseren

Satz von der Periodicität der Formenreihe wird diese Schwierigkeit gehoben. Wir haben jetzt nämlich F_1 nur mit der endlichen Anzahl r von Formen F' zu vergleichen. Wir können also jetzt (d. h. im Falle der Formen mit ganzzahligen oder doch commensurablen Coefficienten) die Aequivalenzfrage durch eine von vorneherein angebbare endliche Anzahl von Schritten entscheiden.

Eine ganze Reihe anderer interessanter Folgerungen ergibt sich, wenn wir die Substitution aufsuchen, welche F_1 in F_{r+1}, d. h. in sich selbst überführt.

Zu jeder Form F gehörte ja ein reducirtes Coordinatensystem. Dabei entstand die Elementarfigur einer jeden aus der in der Reihe vorhergehenden Elementarfigur durch eine affine Transformation von der Determinante 1 (nämlich



durch eine Wiederholung der Substitutionen S oder S'). Es hängen also auch die Coordinatensysteme x_1, y_1 und x_{r+1}, y_{r+1}, welche zu F_1 bez F_{r+1} gehören durch eine Substitution von derselben Beschaffenheit zusammen:

$$\sum \left| \begin{array}{l} x_1 = \alpha x_{r+1} + \beta y_{r+1} \\ y_1 = \gamma x_{r+1} + \delta y_{r+1} \end{array} \right. \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Diese Substitution führt F_1 in sich selbst über; wir bezeichnen sie also eine <u>Automorphie der Form</u>.

Alle Substitutionen, zu welchen wir beim Übergang von einer Elementarfigur unserer Reihe zu einer andern kommen, haben die Eigenschaft, nicht nur die Determinante 1 zu besitzen, sondern die positive x-Axe in demselben Sector zwischen den Linien $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ zu belassen. Wir wollen eine Substitution von dieser Eigenschaft vorübergehend eine <u>reguläre</u> nennen. Ein Beispiel einer nicht regulären Substitution liefert die folgende:

$$x_1 = -x_2, \quad y_1 = -y_2, \text{ oder auch } x_1 = -y_2, \quad y_1 = +x_1$$

Wir bezeichnen daher genauer unsere Automorphie als eine <u>reguläre Auto„morphie</u>.

Gehen wir sodann von F_{r+1} zu F_{2r+1} weiter, so geschieht dieser gleichfalls durch eine affine Transformation von der Determinante 1. Es zeigt sich sofort, dass diese mit Σ identisch sein muss. Denn der Uebergang von dem Coordinatensystem $(r+1)$ zu $(2r+1)$ setzt sich durch genau dieselbe Combination der Ope„rationen S' und S'' zusammen, wie der Uebergang von (1) zu $(r+1)$. Wollen wir zu neuen regulären Auto„morphien kommen, so können wir also nichts anderes machen, als dass wir die Operation Σ wiederholen, d. h. von F_1 direct zu F_{2r+1}, F_{3r+1} etc. „über„gehen. Wir bilden uns also die Reihe der folgenden Substitutionen:

$$\ldots \Sigma^{-2}, \Sigma^{-1}, \Sigma^0, \Sigma, \Sigma^2, \ldots\ldots$$

Wir erhalten so eine unendliche Reihe

von Automorphien der Form F_1. Alle Substitutionen dieser Reihe sind von einander verschieden. In der That wird das Coordinatensystem (1), wie aus der Figur hervorgeht, durch alle diese Substitutionen in lauter verschiedene neue Lagen gebracht. Andrerseits gibt es auch keine anderen regulären Automorphien von F_1 als die hingeschriebenen. Denn es muss jede solche Substitution die Reihe der reducirten Formen in sich überführen, sie muss also eine derjenigen Coordinatentransformationen sein, welche die Elementarfigur (1) in eine der anderen reducirten Elementarfiguren verwandelt. Die obige Reihe enthält aber alle diejenigen Coordinatentransformationen dieser Art, bei welchen F_1 in sich übergeht.

Die Operation S mit ihren positiven und negativen Potenzen liefert uns also die sämmtlichen, unendlich vielen regulären Automorphien unserer Form.

Man kann diesen Dingen noch eine interessantere Wendung geben, wenn man berücksichtigt, daß jede Substitution neuer Veränderlicher in der analytischen Geometrie auf doppelte Weise aufgefaßt werden kann: entweder als Coordinatentransformation bei festgehaltener Figur, oder als Figurentransformation bei festgehaltenem Coordinatensystem. Bisher haben wir unsere Automorphie vom Standpunkte der Coordinatentransformation betrachtet. Denken wir uns jetzt das Coordinatensystem fest. Dann stellt die Substitution Σ eine affine Umformung der Ebene dar. Da ihre Coefficienten ganze Zahlen sind, so gehen dabei die Gitterpunkte wieder in Gitterpunkte über. Da ferner F_1 in sich übergeführt wird und $F_1 = 0$ die Gleichung der $\mathfrak{R}$-Linien ist, so bleiben die $\mathfrak{R}$-Linien bei jener Umformung ungeändert. Da endlich Σ eine reguläre Substitution ist, so ver-

den auch die zwischen den $\mathfrak{R}$-Linien gelegenen Sectoren in sich übergeführt. Wir nannten aber eine solche affine Umformung, bei welcher die $\mathfrak{R}$-Linien fest bleiben und die $\mathfrak{R}$-Sectoren in sich verwandelt werden, eine Pseudodrehung. Bei unserer zweiten Auffassung ist also die Operation Σ eine Pseudodrehung um O, welche das Punktgitter als Ganzes ungeändert lässt.

Auf Grund des Früheren können wir sagen: es gibt unendlich viele solcher Pseudodrehungen. dieselben werden durch die positiven und negativen Potenzen von Σ erschöpft.

Gleichzeitig mit den $\mathfrak{R}$-Linien und den Punktgittern werden auch die Umrisspolygone der letzteren durch unsere Pseudodrehungen mit sich zur Deckung gebracht. Dieselben besitzen also eine Regelmässigkeit ähnlich der der regulären Polygone in der Elementargeometrie. Während aber bei diesen jede Seite mit jeder anderen durch eine gewisse Drehung und deren

Wiederholungen zur Deckung gebracht wird, wird bei unseren Polygonen immer erst ein gewisser Complex von Sei„ ten in einen ande„ ren solchen Complex übergeführt.

Die nebenstehende Figur stellt das entsprechende Vorkommniss in der ge„ wöhnlichen Maassbestimmung dar. Wir wollen ein solches Polygon als semiregulär bezeichnen. Von unseren Umrisspolygonen werden wir daher sagen können: <u>sie sind pseudo„ semiregulär.</u>

Hier entsteht vor Allem die Frage nach der (hyperbolisch gemessenen) Grösse des zur Substitution Σ geho„ rigen Drehungswinkels. Diese Frage werden wir unter anderen beantwor„ ten, indem wir im Folgenden als analytische Ergänzung zu dem Vorhergehenden die Theorie der

Pell'schen Gleichung entwickeln.

Wir gehen aus von der Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

und suchen eine reguläre Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y', \quad | \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

welche f in sich überführt. Die Rechnung wird ganz einfach, wenn wir Folgender berücksichtigen: Die angeschriebene Substitution läßt den Nullpunkt und zwei Strahlen durch denselben ungeändert. Die Gleichung der letzteren ergiebt sich, wenn wir $x' = \varrho x$, $y' = \varrho y$ setzen; sie lautet

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y} \quad \text{oder} \quad \gamma x^2 + (\delta - \alpha) xy - \beta y^2 = 0$$

Soll die Form f bei unserer Substitution in sich übergehen, so müssen diese beiden Strahlen mit den $\mathfrak{R}$-Linien ($f = 0$) zusammenfallen. Es müssen also die Coefficienten in den Gleichungen beider Geradenpaare proportional sein:

$\gamma = a \cdot u$, $\delta - \alpha = b \cdot u$, $\beta = -cu$,
unter u eine ganze Zahl verstanden.
Setzen wir noch $\delta + \alpha = t$, so berechnet sich

$$\alpha = \frac{t - bu}{2} \quad , \quad \beta = -cu$$
$$\gamma = a \cdot u \quad , \quad \delta = \frac{t + bu}{2} .$$

Die Zahlen t und u sind nun nicht willkürlich, aus der Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ folgt nämlich:

$$t^2 - Du^2 = 4$$

Die ist die berühmte Pell'sche Gleichung.
Jede ganzzahlige Lösung dieser Gleichung liefert uns eine Automorphie von f.
ei. d. 13. XII. Wir erhalten übrigens durch die Pell'sche Gleichung ausser den regulären Automorphien auch diejenigen, bei denen die R.-Sectoren vertauscht werden. Eine Lösung ist nämlich auch:

$$t = \pm 2 \quad , \quad u = 0 .$$

Zu dieser gehört die Substitution

$$\alpha = \pm 1 \quad \beta = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm x'$$
$$\gamma = 0 \quad \delta = \pm 1 \qquad\qquad y = \pm y'$$

so daß für $t = -2$ $x = -x'$, $y = -y'$ entsteht. Setzen wir diese Substitution mit den sämmtlichen regulären zusammen, so ergeben sich die sämmtlichen nicht regulären Substitutionen von f in sich selbst.

Besonders einfach werden alle diese Transformationsgleichungen in Minimalcoordinaten. Wir spalten f in zwei Factoren.

$$f = \xi\,\eta$$

$$\xi = m\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\,y\right)$$

$$\eta = \frac{1}{m}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{D}}{2}\,y\right),$$

wobei die Hinzufügung der Factoren m, $\frac{1}{m}$ nur eine Aenderung des Azimuthes bedeutet, unter welchem wir unser Gitter gegen das Coordinatensystem „orientiren". ξ, η sind die Minimalcoordinaten des Punktes x, y. Seien ferner ξ', η' Minimalcoordinaten desjenigen Punktes x', y', in welchen der Punkt x, y durch eine

Automorphie von f übergeführt wird, so daß

$$\xi' = m\left(\sqrt{a}\, x' + \frac{b+\sqrt{D}}{2} y'\right)$$

$$\eta' = \frac{1}{m}\left(\sqrt{a}\, x' + \frac{b-\sqrt{D}}{2} y'\right).$$

Tragen wir in die Ausdrücke für ξ und η die Werte von x und y aus den Substitutionsformeln der vorletzten Seite ein, so ergiebt sich einfach:

$$\xi = \frac{t+\sqrt{D}\,u}{2}\,\xi',$$

$$\eta = \frac{t-\sqrt{D}\,u}{2}\,\eta'.$$

Die Minimalcoordinaten ξ, ξ' und η, η' zweier durch die Automorphie zugeordneter Gitterpunkte sind also untereinander proportional. Es ist dieses selbstverständlich, weil ja die Minimallinien $\xi = 0$, $\eta = 0$ bei der Automorphie nicht geändert werden.

Wir geben der Pell'schen Substitution noch eine etwas andere Form, indem wir statt $f =$ schreiben: $a\omega^2 + b\omega + c = a(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) = 0$. Dann wird $\xi = n(\omega - \omega_1)$,

$\eta = n'(\omega - \omega_2)$, wo n und n' nun bestimmt bleibende Factoren sind, also

$\frac{\xi}{\eta} = \left(\frac{n}{n'}\right) \frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2}$; ebenso haben wir

$\frac{\xi'}{\eta'} = \left(\frac{n}{n'}\right) \frac{\omega' - \omega_1}{\omega' - \omega_2}$

Die Pell'sche Substitution kann daher folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} = \frac{t + u\sqrt{D}}{t - u\sqrt{D}} \cdot \frac{\omega' - \omega_1}{\omega' - \omega_2}$$

oder mit Rücksicht auf die Pell'sche Gleichung:

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} = \left(\frac{t + u\sqrt{D}}{2}\right) \frac{\omega' - \omega_1}{\omega' - \omega_2}$$

Die Proportionalitätsfactoren müssen, da $\xi\eta = \xi'\eta'$ ist, der Bedingung genügen, daß ihr Product gleich ± 1 ist. Hierdurch characterisirt sich unsere Automorphie als Pseudodrehung. In der That haben wir der Pell'schen Gleichung zufolge:

$$\frac{t^2 - Du^2}{4} = \pm 1.$$

Da nach dieser Gleichung $|t| > |\sqrt{D}\,u|$, so hängt das Vorzeichen der Proportio=

nalitätsfactoren von dem Vorzeichen von t ab. Nehmen wir t also positive Zahl, so sind auch jene Factoren positiv, die Automorphie also eine reguläre

Die Größe des Drehungswinkels berechnet sich nach pg. 75 aus den vorstehenden Substitutionsformeln zu

$$\frac{i}{2} lg \frac{t+\sqrt{D}u}{t-\sqrt{D}u} = \frac{i}{2} lg \frac{(t+\sqrt{D}u)^2}{4} = i\, lg \frac{(t+\sqrt{D}u)}{2}$$

Wir combiniren jetzt diese Entwickelungen mit den früheren geometrischen Betrachtungen. Da folgt zunächst, daß die Pell'sche Gleichung sicher Lösungen hat, welche von der trivialen $t = \pm 2$, $u = 0$ verschieden sind. Ferner aber sagen wir:

Da irgend zwei Automorphien nacheinander ausgeführt wieder zu einer Automorphie führen, so werden sich irgend zwei Lösungen t, u und t', u' der Pell'schen Gleichung wiederum zu einer Lösung dieser Gleichung zusammensetzen müssen. In der That, sei

$$\xi = \frac{t + u\sqrt{D}}{2} \cdot \xi'$$

die eine

$$\xi' = \frac{t' + u'\sqrt{D}}{2} \cdot \xi''$$

die zweite Automorphie. Dann folgt

$$\xi = \frac{t + u\sqrt{D}}{2} \cdot \frac{t' + u'\sqrt{D}}{2} \cdot \xi'' = \frac{T + U\sqrt{D}}{2} \xi'',$$

$$T = \frac{tt' + uu'D}{2}, \quad U = \frac{tu' + ut'}{2}.$$

Um einzusehen, dass die Zahlen T und U ganze Zahlen sind, müssen wir hinsichtlich der Discriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

zwei Fälle unterscheiden. Je nachdem b gerade oder ungerade, ist

entweder $D \equiv 0\ (4)$

oder $D \equiv 1\ (4)$;

aus der Pell'schen Gleichung folgt im ersten Falle, dass t und t' gerade, im zweiten Falle, dass t und u (und ebenso t' und u') gleichzeitig gerade oder ungerade sind. Allemal werden daher T und U ganze Zahlen. Sie genügen überdiess der Pell'schen Gleichung, wie sofort zu sehen ist.

Beiläufig bemerken wir: Wir können

bei der Pell'schen Gleichung auch ganz von dem Zusammenhange mit den Automorphien absehen und die Grössen

$$\frac{t + u\sqrt{5}}{2} \quad \text{bez.} \quad \frac{t - u\sqrt{5}}{2}$$

als <u>complexe Zahlen</u> auffassen, wobei wir t und u durch die Relation verbunden denken: $t^2 - 5u^2 = 4$. <u>Das System dieser complexen Zahlen hat</u>, nach dem, was wir soeben sahen, <u>die Eigenschaft sich bei der Multiplication zu reproduciren</u>, in dem Sinne, dass das Product zweier Zahlen $\frac{t + u\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{t' + u'\sqrt{5}}{2}$ wieder eine Zahl $\frac{T + U\sqrt{5}}{2}$ des Systems wird.

Über diese Zahlen können wir ferner auf Grund unserer früheren Betrachtungen den folgenden merkwürdigen Satz aussprechen. <u>Alle Zahlen dieses Systems ergeben sich aus einer einzelnen kleinsten Lösung t_0, u_0 der Pell'schen Gleichung indem man $\frac{t_0 + u_0\sqrt{5}}{2}$ potenzirt.</u>

Es entspricht nämlich jede Zahl $\frac{T + U\sqrt{5}}{2}$ einer unserer Automorphien. Nun konnten wir alle Automorphien mit

Hülfe einer kleinsten Automorphie Σ in der Form darstellen Σ^u. Der Zusammensetzung zweier Automorphien entspricht die Multiplikation der complexen Zahlen, der Wiederholung einer Automorphie, also die Potenzirung der Zahlen. Ist daher $\frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}$ diejenige Zahl des Systems, welche zu Σ gehört, so gehört zu Σ^u die Zahl

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}\right)^u.$$

Der zur Substitution Σ gehörige Drehungswinkel, nach welchem wir oben fragten, berechnet sich aus der Lösung t_0, u_0 der Pell'schen Gleichung in folgender Weise

$$\phi_0 = i \lg \frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}$$

Wir nennen ϕ den Pell'schen Winkel. Wir erweitern jetzt diese Betrachtungen noch nach anderer Seite.

Wir fassen nämlich alle reducirten Formen in's Auge, welche bei gegebenem Werte der Discriminante möglich sind. Diejenigen Formen, welche aequi-

valent sind, bilden eine „Klasse" von Formen, und in den reducirten Formen haben wir „Repräsentanten" der einzelnen Klasse. Nun ist es sehr wohl möglich, daß die zu derselben Discriminante gehörigen reducirten Formen sich auf verschiedene Klassen verteilen. Da es aber nur eine endliche Anzahl reducirter Formen giebt, so kann man aus ihnen stets nur eine endliche Anzahl zusammengehöriger aequivalenter Formenreihen herstellen.
Es giebt daher bei gegebenem D nur eine endliche Anzahl verschiedener Klassen.

Diese verschiedenen Klassen stehen sich aber nicht fremd gegenüber. Sie bilden einen zusammenhängenden Organismus. Es geht dies schon daraus hervor, daß allen diesen Klassen die Pell'sche Gleichung gemeinsam ist. In der That hängt diese Gleichung ja nur von dem Werte von D, nicht von den Besonderheiten der Klasse ab. Wir

werden das später noch sehr viel mannigfaltiger entwickeln.

Unter diesen Klassen giebt es eine ausgezeichnete, welche man Hauptklasse nennt. Die Hauptklasse kann stets einer anderen definirt werden, je nachdem der Fall $D \equiv 0 \pmod 4$ oder $D \equiv 1 \pmod 4$ vorliegt. Im ersten Falle ist die Hauptklasse diejenige, welche die Form enthält

$$x^2 - \frac{D}{4} y^2 \quad \left\{ D \equiv 0 \pmod 4 \right\}$$

Im zweiten Falle diejenige, in welcher die Form

$$x^2 + xy + \frac{1-D}{4} y^2 \quad \left\{ D \equiv 1 \pmod 4 \right\}$$

vorkommt. Alle anderen Klassen der Discriminante D werden als Nebenklasse bezeichnet.

Mit den soeben angeschriebenen Hauptformen hängt die Lösung der Gleichung auf das Engste zusammen. Setzen wir nämlich im ersten Falle $t = 2x$, $u = y$, so lautet dieselbe:

$$x^2 - \frac{D}{4} y^2 = 1 .$$

Im zweiten Falle setzen wir $t - u = 2x$, $u = y$, dann geht die Pell'sche Gleichung über in

$$x^2 + xy + \frac{1-D}{4} y^2 = 1$$

Beidemale erhalten wir aus der Pell'schen Gleichung die gleich 1 gesetzte Hauptform. Die allgemeine Lösung der Pell'schen Gleichung kommt also darauf hinaus, durch die Hauptform die Zahl 1 in allgemeinster Weise darzustellen.

So haben wir nun ein reicher Material neuer Sätze und neuer Auffassungen und es kommt darauf an, jetzt zunächst dasselbe durch Zahlenbeispiele zu illustrieren. Dabei werden sich von selbst noch einige Bemerkungen ergeben, die auf die allgemeine Theorie Bezug haben.

Ausführliche numerische Tabellen sind von Cayley berechnet worden. (Vergl. Crelle Bd. 60 oder Ges. Werke. Bd. 5 pg 141 ff.). Cayley berechnet zu allen Discriminanten $|D| < 100$ und für einige weitere die zugehörigen Klassen quadratischer Formen.

Ferner sind derartige Tabellen von Legendre mitgeteilt worden (Vergl. Zahlentheorie Bd. I.). Wir verweisen in's Besondere auf die Tabelle X, welche die Theorie der Pell'schen Gleichung zum Gegenstande hat. Leider finden sich überall Unterschiede in der Bezeichnung, über die man sich vorab unterrichten muss, ehe man die Tabellen gebraucht.

Hier wollen wir $D = 40$ annehmen.

Zunächst berechnen wir die zu dieser Discriminante gehörigen sämmtlichen reducirten Formen. Es handelt sich dabei um die Formen (A, B, C), für welche $AC < 0$ und $B^2 - 4AC = 40$ ist. Wir stellen die Formen mit positivem A voran, die Formen mit negativem A bekommen wir aus jenen, indem wir die Vorzeichen sämmtlicher Coefficienten umkehren.

Für B setzen wir nacheinander alle geraden Zahlen $|B| < \sqrt{40}$ und suchen die zugehörigen Lösungen der Diophantischen Gleichung $B^2 - 4AC = 40$,

für welche $AC < 0$, $A > 0$ ist. Es ergiebt sich

$$B = 0 \quad \begin{cases} 10 , & 0 , & -1 \\ 5 , & 0 , & -2 \\ 2 , & 0 , & -5 \\ 1 , & 0 , & -10 \end{cases}$$

$$B = \pm 2 \quad \begin{cases} 9 , & \pm 2 , & -1 \\ 3 , & \pm 2 , & -3 \\ 1 , & \pm 2 , & -9 \end{cases}$$

$$B = \pm 4 \quad \begin{cases} 6 , & \pm 4 , & -1 \\ 3 , & \pm 4 , & -2 \\ 2 , & \pm 4 , & -3 \\ 1 , & \pm 4 , & -6 \end{cases}$$

$$B = \pm 6 \quad \begin{cases} 1 , & \pm 6 , & -1 . \end{cases}$$

Hiernach gibt es 20 reducirte Formen mit positivem A, ebenso viele Formen existiren mit negativem A, so dass die Gesamtzahl der reducirten Formen in diesem Falle 40 beträgt, und mit der Discriminante zufälliger Weise übereinstimmt.

Unter diesen Formen suchen wir uns die Hauptreducirten erster und zweiter Art aus, d. h. diejenigen Formen, für welche die Ungleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &< 0 \\ A + B + C &> 0 \end{aligned}\right\}$$

bez.

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &> 0 \\ A + B + C &< 0 \end{aligned}\right\}$$

Es erweisen sich als Hauptreducirte 1. Art die folgenden 4 Formen:

$$\begin{array}{l} 3, -2, -3 \\ 3, -4, -2 \\ 2, -4, -3 \\ 1, -6, -1 \end{array}$$

Ebenso groß ist die Anzahl der Hauptreducirten 2. Art. Sie entstehen offenbar aus denen der ersten Art dadurch, daß wir B im Vorzeichen umkehren. Demnach sind Hauptreducirte der 2ten Art die folgenden 4 Formen:

$$\begin{array}{l} 3, +2, -3 \\ 3, +4, -2 \\ 2, +4, -3 \\ 1, +6, -1. \end{array}$$

Die übrigen 32 Formen sind Nebenre„ ducirte. Zu'r Besondere gehört die Hauptform $(1, 0, -10)$, sowie alle Formen mit $B = 0$ zu den Nebenreducirten. Von den Nebenreducirten werden wir nur beiläufig sprechen.

Wir stellen nun die zusammengehöri„ gen Serien der hauptreducirten Formen auf, indem wir von irgend einer Haupt„ reducirten 1ter Art ausgehen. Sei die Ausgangsform

$$F_1 = 3x^2 - 2xy - 3y^2.$$

Auf diese Form üben wir die Operation

$$S \begin{cases} x = x' + y' \\ y = \quad y' \end{cases}$$

so oft aus, bis eine Hauptreducirte der 2ten Art entsteht. Es ergiebt sich schon beim ersten Male

$$F_2 = 3x^2 + 4xy - 2y^2.$$

An dieser Form operiren wir mit

$$S' \begin{cases} x = x' \\ y = x' + y' \end{cases}$$

Dabei entsteht zuerst die Nebenreduzirte $5x^2 - 2y^2$. bei nochmaliger Anwendung von S' aber ergiebt sich:

$$F_3 = 3x^2 - 4xy - 2y^2$$

Jetzt wenden wir wieder S an und bekommen die Hauptreduzirte

$$F_4 = 3x^2 + 2xy - 3y^2$$

Hieraus entsteht durch die Operation S

$$F_5 = 2x^2 - 4xy - 3y^2$$

sodann durch S^2

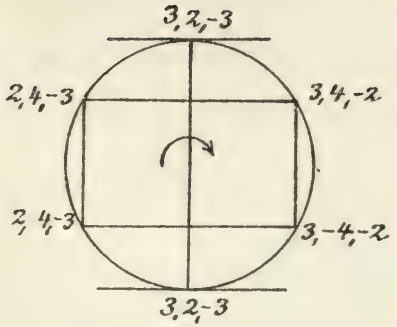
$$F_6 = 2x^2 + 4xy - 3y^2.$$

Operiren wir an F_6 wiederum mit S', so erhalten wir schliesslich

$$F_7 = 3x^2 - 2xy - 3y^2 = F_1.$$

In unserm Beispiele treten also 3 Hauptreduzirte der 1ten Art (und ebenso viele der 2ten Art) zu einer ersten Formenserie zusammen. Wir wollen uns die Aufeinanderfolge der Formen

schematisch durch Punkte einer geschlossen Curve versinnlichen. Wir erhalten dann in unserem Falle das nebenstehende Bild.



Zu unserer Formenserie gehört eine kleinste Substitution, welche diese Serie in sich transformirt. Diese Substitution können wir, wenn wir von F_1 ausgehen, nach dem Vorstehenden symbolisch schreiben:

$$(x, y) = SS''^2 SS' S^2 S' (x', y');$$

ausgerechnet lautet dieselbe

$$x = 25 x^{\overline{VI}} + 18 y^{\overline{VI}}$$
$$y = 18 x^{\overline{VI}} + 13 y^{\overline{VI}}$$

Dieser kleinsten Substitution entspricht eine kleinste Lösung der Pell'schen Gleichung:

$$t^2 - 40 u^2 = 4.$$

Dieselbe berechnet sich nach pg. 141 aus den Coefficienten unserer Substitution und der Ausgangsform zu

$$t = 38 \,, \quad u = 6$$

Alle anderen Lösungen der Pell'schen Gleichung müssen sich aus dieser Lösung durch Potenziren ableiten lassen. Der Pell'sche Winkel wird $\lambda \log(19 + 6\sqrt{10})$. Von den 8 hauptreducirten Formen der Discriminante + 40 bleiben nur 2 Formen übrig, welche nicht in unserer ersten Formenserie enthalten sind. Dieselben müssen sich zu einer 2ten Serie zusammenschliessen. Wir gehen bei der Berechnung dieser 2ten Serie von der Hauptreducirten erster Art

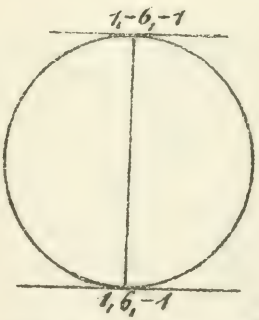
$$F_1 = X^2 - 6XY - Y^2$$

aus. An dieser Form operiren wir mit S^{μ}, wobei wir $\mu = 1, 2 \ldots$ wählen werden, bis wir wieder auf eine Hauptreducirte kommen. Nehmen wir $\mu = 3$, so entsteht die Hauptform $X^2 - 10\,Y^2$, welche eine Neben-

reducirte ist. Erst für $\mu = 6$ ergibt sich wieder eine Hauptreducirte u. zw. die noch restirende Form:

$$F_2 = X^2 + 6XY - Y^2,$$

wie es sein muss. Üben wir auf die. se successive die Operationen S^1, U aus, so kommen wir für $\mu = 6$ wie„ der auf F zurück. Unsere Zweite Formenserie besteht also nur aus 2 Hauptreducirten, übrigens enthält sie dafür um so mehr Nebenreducirte, nämlich 10. Wollen wir uns auch diese Serie schematisch auf einem geschlossenen Curven„ zuge veranschaulichen, so kommen wir zu der nebenstehenden Figur.



Wir haben nunmehr die sämmtlichen 20 re„ ducirten Formen mit positivem A auf 2 Klassen untergebracht. Zu den Formen mit negativem A konnten wir durch unser bisheriges Verfahren

nicht gelangen, weil wir nur die „regulären" Substitutionen S und S' angewandt haben, welche die S-Sektoren einzeln in sich transformiren. Um zu erkennen, ob sich die Formen mit negativem A in dieselben Klassen einordnen, müssen wir diejenigen Substitutionen von der Determinante ± 1 hinzunehmen, welche die S-Sektoren vertauschen. Eine einfachste solcher Substitutionen ist die uns von früher bekannte Operation:

$$T\left\{\begin{array}{l} X = -Y' \\ Y = X' \end{array}\right.$$

Wenden wir diese auf eine reducirte Form $AX^2 + BXY + CY^2$ mit negativem A (und folglich mit positivem C) an, so entsteht eine Form $CX^2 - BXY + AY^2$ mit positivem ersten Coefficienten. Die Formen mit negativem ersten Coefficienten sind also je mit einer Form aequivalent, deren erster Coefficient positiv ist. Diese Formen ordnen sich also all-

gemein in die Classen der Formen mit positivem A, in unserem Falle somit in die beiden vorher gefundenen Klassen ein. Es giebt bei der Discriminante 40 nur zwei verschiedene Klassen quadratischer Formen.

Bei dieser Gelegenheit bringen wir noch einige Details zur Sprache. Man bezeichnet die Form $(-A, -B, -C)$ als die zu einer gegebenen Form (A, B, C) entgegengesetzte Form (forma opposita).

Wir fragen uns, wann eine Form mit ihrer entgegengesetzten aequivalent ist.

Zunächst können wir mittelst der Substitution T die Form $(-A, -B, -C)$ umsetzen in die aequivalente Form $(-C, B, -A)$. Ist (A, B, C) eine reducirte Form mit positivem ersten Coefficienten, so ist auch $(-C, B, -A)$ eine ebensolche. Daraus folgt: Soll eine reducirte Form (A, B, C) mit ihrer entgegengesetzten $(-A, -B, -C)$ aequivalent sein, so muß $(-C, B, -A)$

in derselben Formenserie enthalten sein, wie (A, B, C) selbst.

Bei der Discriminante $D = 49$ ist dieser wirklich der Fall. Wir deuten dieses in den Figuren durch die horizontalen Geraden an, welche je eine Form $(-C, B, -A)$ mit einer Form (A, B, C) verbinden. Im Allgemeinen trifft dieses jedoch keineswegs immer zu, wie die Cayley'schen Tabellen zeigen.

Man bezeichnet ferner eine Form, welche mit sich selbst uneigentlich aequivalent ist, d. h. bei einer affinen Transformation von der Determinante -1 ungeändert bleibt, als Ancepsform (nach Gauss) oder als ambige Form (nach Kummer). Die Formenklasse, in welcher eine Ancepsform enthalten ist, heisst auch eine Ancepsklasse. Um zu entscheiden, wann eine Klasse ambig ist, transformiren wir eine reducirte Form (A, B, C) der Klasse mittelst der Substitution

$$x = x',$$
$$y = -y',$$

welche von der Determinante -1 ist, in die gleichfalls reducirte Form $(A, -B, C)$. Diese Form muss mit der gegebenen eigentlich aequivalent sein, wenn die gegebene Form mit sich selbst uneigentlich aequivalent ist. Daraus folgt: Wenn unsere Klasse eine Ancips-Klasse sein soll, so muss die Form $(A, -B, C)$ in derselben Formenserie vorkommen, wie (A, B, C).

Die Betrachtung der Figuren von pg. 157 und 159 zeigt, dass im Falle $D = 40$ beide vorhandenen Klassen Ancips-Klassen sind. Wir deuten dieses durch die vertikalen Geraden an, welche je von einer Form (A, B, C) zu einer Form $(A, -B, C)$ hinführen. Im allgemeinen Falle trifft dieses natürlich nicht zu.

Freiburg i. d. 21. VII. Der Theorie der indefiniten quadratischen Formen haben wir als Ergänzung heute noch einige Bemerkungen über die arithmetischen Kriterien hinzuzufügen, durch welche wir entscheiden können,

ob ein Gitterpunkt zu einem der natürlichen Umrißpolygone gehört. Dazu ist offenbar zunächst erforderlich, daß die Coordinaten der Gitterpunktes x und y keinen gemeinsamen Teiler haben. Als weitere Bedingung teilen wir ohne Beweis die folgende mit: Es wird in den Ecken der Umrißpolygone

$$f(x, y) \leqq D/4.$$

Man kann den Minimalwert von f noch genauer abschätzen. Es zeigt sich nämlich, daß f mindestens in einer Ecke der Umrißpolygone einen Wert

$$\leqq \sqrt{\frac{D}{5}}$$

annimmt. Wegen des Beweises vergleiche man eine interessante Arbeit von Markoff in Math. Annalen Bd. 15 (1879). Es wird interessant sein, die Entwickelungen von Markoff durchweg in die Geometrische zu übersetzen. Übrigens hängen diese Betrachtungen mit unseren früheren Entwickelungen betreffend den Minimum der Linearformen zusammen,

durch welche wir den Lagrange'schen Satz über Kettenbrüche (vergl. pg. 39) bewiesen.

4. Die Reductionstheorie im elliptischen Falle.

Wir hätten jetzt die entsprechende Theorie wie für die indefiniten auch für die definiten Formen zu entwickeln. Um aber vor Weihnachten zu einem guten Abschluß zu kommen, sei es gestattet, hierbei nur die Resultate anzugeben. Sie finden übrigens alles Wesentliche über definite Form auch in der Literatur vor.

Sei $f = ax^2 + bxy + cy^2$ eine definite Form, für welche also $D = b^2 - 4ac < 0$ ist. Wir setzen $D = -\Delta$, so daß Δ positiv ist. Die Coefficienten a und c haben notwendiger Weise dasselbe Vorzeichen, wir wollen der Bestimmtheit wegen annehmen, daß beide positiv und daß wir es also mit einer positiven Form f zu thun

haben. Wir bringen unsere Bemerkungen unter eine Reihe von Punkten.

1. Die geometrische Deutung im Gitter wird, wie wir schon früher sahen, bei den definiten Formen besonders einfach. Man reicht dabei nämlich mit der gewöhnlichsten Maafsbestimmung aus. Das Fundamentalparallelogramm des zur Form f gehörigen Gitters hat die Seitenlängen $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$ und einen eingeschlossenen Winkel χ von der Grösse $\cos\chi = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$. Die Gittertheorie der definiten Formen ist bereits von Dirichlet viel benutzt worden und ausserordentlich klar in Crelle Bd. 40 auseinandergesetzt worden. Nur bei der Redaction seiner Vorlesungen ist sie leider fortgelassen worden.

2. Das Gitter, welches wir zu der Form f hinzukonstruiren, ist zunächst ein Parallelengitter. Denken wir uns aber die Gitterstäbe weg und achten nur noch auf die Gitterpunkte, so bekommen wir ein Punktgitter. Das Punktgitter ist nicht für die einzelne Form f, sondern für die ganze Klasse der mit f aequivalenten For-

nen charakteristisch.

3. Aus der Formenklasse heben wir eine besonders einfache Form heraus, die wir reducirte Form nennen. Dieselbe wird folgendermaßen definirt. Wir suchen unter allen Gitterpunkten denjenigen auf, welcher von 0 die kleinste Entfernung hat. Die Richtung von 0 nach diesem Punkte wählen wir zur x-Axe, seine Entfernung von 0 liefert die erste Parallelogrammseite VA.

Unter allen nicht auf der x-Axe gelegenen Gitterpunkten suchen wir sodann denjenigen mit der nächstkleinsten Entfernung von 0 heraus. Die Lage dieses Punktes liefert die y-Axe, seine Entfernung von 0 die Parallelogrammseite VC. Die auf dieses Coordinatensystem transformirte gegebene Form nennen wir die zu f gehörige reducirte Form, sie laute

$$AX^2 + BXY + CY^2.$$

Bei der Bestimmung des reducirten Coordinatensystems können wir sowohl den x- wie den y-Vector ebenso gut

nach der einen wie nach der anderen Seite von 0 aus ziehen, weil zu jedem Punkte im Gitter auch der diametrale Punkt vorhanden ist. Abgesehen von dieser Unbestimmtheit gibt es im Allgemeinen nur ein Coordinatensystem, welcher die geforderten Eigenschaften hat und also auch nur eine reducirte Form. Bei besonderen Symmetrieverhältnissen des Gitters kann jedoch unsere Construction auch zwei- und dreideutig werden, dann gibt es zwei oder drei reducirte Formen in derselben Klasse.

5. Das arithmetische Kennzeichen einer reducirten Form sind die folgenden Ungleichungen:

$$|B| \leqq A \leqq C.$$

Speciell ergibt sich für den ersten Coefficienten A einer reducirten Form die Beziehung

$$A \leqq \sqrt{\frac{\Delta}{3}}.$$

6. Die Herstellung der reducirten Form (A, B, C) aus einer gegebenen Form (a, b, c) erfolgt auch durch alternirende

Benutzung der Operationen S und S'. Man transformirt nämlich (a, b, c) abwechselnd mittelst S^u und S'^v, wo, bei man allemal u und v so wählt, dass der mittelste Coefficient der transformirten Form so klein wie möglich wird. So kommt man schliesslich durch eine endliche Anzahl von Schritten zu einem absolut kleinsten Werte B und zu der zugehörigen reducirten Form.

7. Dieser Process hängt wieder eng mit der Kettenbruchentwickelung für die Wurzeln von f, die Grössen

$$\left.\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{b \pm \sqrt{D}}{2}$$

zusammen.

Soviel über die <u>allgemeine</u> Theorie der definiten Formen bei beliebigen a, b, c. <u>Bei ganzzahligen</u> (oder rom. meromorphen) <u>Coefficienten</u> finden die folgenden besonderen Verhältnisse statt.

<u>1. Bei gegebenem D gibt es nur eine endliche Anzahl von Klassen.</u> Es gibt

nämlich wegen der Begrenzungen, denen die Coefficienten der reducirten Formen unterworfen sind, nur eine endliche Anzahl von solchen Formen. Wir erwähnten bereits, dass A kleiner als $\sqrt{\frac{\Delta}{3}}$ wird. Es gibt also nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werte von A.

Ferner ist B kleiner als A und C durch A, B und Δ mitbestimmt.

Die Anzahl der zu gegebener Discriminante $\Delta < 100$ gehöriger Klassen kann man in's Besondere aus den oben citirten Cayley'schen Tabellen entnehmen.

2. Man wird auch hier nach den Automorphicen fragen. Was die <u>eigentlichen Automorphicen</u> (welche die Determinante $+1$ haben) betrifft, so ergeben sich diese wieder aus der <u>Pell'schen Gleichung</u>. Dieselbe lautet jetzt:

$$t^2 + \Delta u^2 = 4.$$

Ihre Theorie wird ungemein einfach. Ist nämlich $\Delta > 4$, so gibt es nur die eine triviale Lösung $t = \pm 2$,

$u = 0$. Ausserdem existiren im Falle $\Delta = 3$ und $\Delta = 4$, wo die reducirten Formen

$$X^2 + XY + Y^2$$

bez. $$X^2 + Y^2$$

lauten werden, noch einige wenige nicht triviale Lösungen. Am deutlichsten werden diese Verhältnisse, wenn man an den Pell'schen Winkel Φ denkt, welcher jetzt einen gewöhnlichen Winkel bedeutet. Die Automorphie ist dann eine gewöhnliche Drehung des Gitters um 0 durch diesen Winkel, bei welcher das Gitter in sich übergeht. Der Lösung $t = -2$, $u = 0$ entspricht der Winkel $\Phi = \pi$. Im Allgemeinen geht das Gitter nur bei einer Drehung um π (oder 2π) in sich über, was ja selbstverständlich ist. Für die besonderen Werte $\Delta = 3$ oder $\Delta = 4$ dagegen hat der Pell'sche Winkel die Größe $\pi/3$ oder $\pi/4$. Das Gitter ist dann ein gleichseitiges oder ein quadratisches Gitter, welche ihrer besonderen Symmetrie wegen

bereits bei einer Drehung von $\pi/3$ oder $\pi/4$ mit sich zur Deckung kommen.
3. Auch die uneigentlichen Automorphieen (von der Determinante -1) lassen sich mit einem Worte erledigen. Das Vorhandensein einer uneigentlichen Automorphie bedeutet, daß das Gitter mit sich invers congruent ist, also durch Spiegelung in sich übergeht. Dies findet nur statt bei den <u>rechteckigen</u> und den <u>rhombischen Gittern</u>. Benutzen wir unsere obige Bezeichnung von pg. 162, so können wir sagen: Die einzigen Automorphismen, welche in der Theorie der definiten Formen möglich sind, sind diejenigen mit einem rechteckigen oder rhombischen Punktgitter.

II. Hauptteil:

Die Reductionstheorie in ihrer Wirkung auf die Gesammtheit der binären quadratischen Formen.

Bo. d. 10. I. 95. Nachdem wir im ersten Hauptteile die einzelne quadratische Form untersucht und in's Besondere ihre Reduction durchgeführt haben, soll es sich jetzt darum handeln, die Gesammtheit der zu gegebenem D gehörigen quadratischen Formen zu überblicken und die Stellung der reducirten Formen innerhalb dieser Gesammtheit zu charakterisiren.

1. Allgemeiner Ansatz.

Wir recapituliren kurz die Definition der reducirten Formen. Dieselbe fiel verschieden aus, je nachdem $D < 0$ oder $D > 0$ war. Bei negativen D wurde eine Form (a, b, c) reducirt genannt,

wenn

$$|b| \leqq a \leqq c$$

war. die Coefficienten a und c wurden dabei als positiv vorausgesetzt, indem es genügte, von den positiven definiten Formen zu sprechen. Durch die vorstehenden Ungleichungen war die reducirte Form in eindeutiger Weise festgelegt, wenn wir von gewissen Ausnahmewerten von D absahen, die wir bald nach eingehender untersuchen werden.

Ist dagegen $D > 0$, so sollte eine Form (a, b, c) reducirt heissen, wenn

$$ac < 0.$$

Hier gab es im Allgemeinen zu einer vorgelegten Form unendlich viele reducirte Formen, die sich nur für vom, menourable a, b, c auf eine endliche Zahl reducirten.

Für den Zweck den wir nunmehr verfolgen: den Zusammenhang der verschiedenen quadratischen Formen zu überblicken: ist die Darstellung der Formen im Gitter nicht mehr

bequem; denn es ist nicht leicht, die gegenseitige Lage von unendlich vielen Gittern zu erfassen. Wir wählen jetzt eine ganz andere Art von geometrischer Repräsentation. Wir deuten nämlich einfach die Coefficienten a, b, c der Form als gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten im R_3, d. h. als Coordinaten eines Punktes.

Wir construiren uns zunächst die Fläche $b^2 - 4ac = 0$, welche einen Kegel darstellt. Ferner markiren wir den Ort der Punkte, für welche $b^2 - 4ac = D$ ist. Wir erhalten so, indem wir D verschiedene Werte erteilen, eine Schaar von Hyperboloiden, welche alle den genannten Kegel zum Asymptotenkegel haben. Je einer dieser Hyperboloide stellt die sämmtlichen Formen von gleichem D dar. Die Hyperboloide sind zum Teil einschalige, zum Teil zweischalige. Die einschaligen Hyperboloide liegen im Inneren des Asymptotenkegels. Dieselben gehören zu positiven Werten

von D, repräsentiren also die indefiniten Formen. Die zweischaligen Hyperboloide liegen im Innern der Kegels. Die eine Schale senkt sich in die eine, die andere Schale in die zweite Oeffnung des Kegels vom Unendlichen herein. Diese Hyperboloide gehören zu negativem D, u. zw. stellt die eine Schale die definiten positiven, die andere die definiten negativen Formen der Discriminante D dar.

Bei dem Studium des Aequivalenzproblemes kommt es auf die Substitutionen $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in den x, y an. Dieselben schreiben sich, als Substitutionen der nunmehrigen Variabeln a, b, c aufgefasst, folgendermassen:

$$a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$$
$$b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta,$$
$$c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2.$$

Sie bilden in ihrer Gesammtheit eine discontinuirliche Gruppe affiner Umformungen der Raumes, bei welchen (da die Discriminante durch die Substi-

tution ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) nicht geändert wird) unsere sämmtlichen Hyperboloide u. in's Besondere unser Kegel in sich übergehen. Dies wäre das vollständige geometrische Gegenbild der zu betrachtenden arithmetischen Verhältnisse. Wir werden von diesem Bilde jedoch keinen Gebrauch machen, sondern wählen ein unvollständiges schlechteres Bild u. zw. lediglich aus dem Grunde, weil die Vorstellung und namentlich weil die Zeichnung der sämmtlichen Dinge zu schwierig ist.

Wir werden nämlich in der Folge nur auf die Verhältnisse der a, b, c achten und die Größen $a : b : c$ als Dreieckscoordinaten, in der Ebene, sagen wir kurz: <u>als Punkt im R_2</u> deuten.

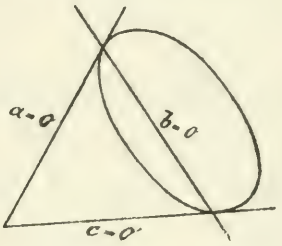
Unsere obigen Transformationsformeln lauten jetzt, da doch nur die Verhältnisse der a, b, c eine geometrische Bedeutung haben sollen:

$$\varrho a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$$
$$\varrho b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta$$
$$\varrho c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2$$

Diese Transformationen stellen jetzt in ihrer Gesammtheit eine <u>Gruppe von projectiven Umformungen der Ebene</u> $a : b : c$ dar. In der Ebene markiren wir uns den Kegelschnitt $b^2 - 4ac = 0$; derselbe bleibt bei den projectiven Transformationen unserer Gruppe ungeändert. Von dem absoluten Werte der Discriminante $b^2 - 4ac$ kann natürlich keine Rede mehr sein. Wir kommen so von der affinen Geometrie im R_3 zu der projectiven im R_2. Unsere neue Deutung ist dabei im Grunde nichts anderes, als eine Projection des vorigen räumlichen Bildes, nämlich die Projection vom Coordinatenanfangspunkt des R_3 aus auf eine irgendwie gestellte Bildebene. Ein ähnliches Verhältniss findet ganz allgemein statt. Man kommt von einer gewöhnlichen Coordinatenbestimmung im R_{n+1} zu einer projecti-

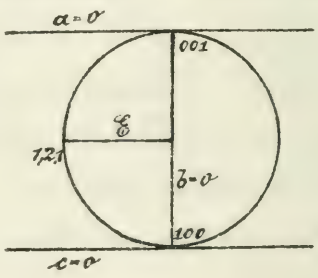
ven im R_n, indem man jenen auf diesen projicirt.

In unserem Falle hat das Coordinatensystem eine charakteristische Lage gegen den fundamentalen Kegelschnitt $b^2 - 4ac = 0$. Es sind nämlich die 2 Seiten $a = 0$, $c = 0$ des Coordinatendreiecks Tangenten an den Kegelschnitt, während die dritte $b = 0$ die Berührungssehne jener Tangenten ist. Wir haben den Kegelschnitt ideal stehend als Ellipse gezeichnet. Das ist natürlich völlig willkürlich, denn in der projectiven Geometrie gibt es keinen Unterschied zwischen Ellipse, Hyperbel und Parabel; oder was dasselbe besagt, bei Benutzung projectiver Coordinaten stellt die Gleichung $b^2 - 4ac = 0$ bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems jeden beliebigen Kegelschnitt dar.



Wir werden die in der Lage des Coordinatensystems zur Verfügung stehende

Willkür dazu benutzen, unsere Figur besonders einfach zu gestalten. Wir wollen zwei Seiten des Coordinaten-dreiecks ($a = 0$ und $c = 0$) parallel und im Abstande 1 zu einander legen und die dritte ($b = 0$) rechtwinklig zu ihnen annehmen. Dem alsdann noch völlig willkürlichen Einheitspunkte geben wir den Abstand $1, \frac{1}{2}, 1$ bez. von $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Unser Kegelschnitt geht durch den Punkt $a : b : c = 1 : 2 : 1$ hindurch; zufolge unserer Verfügung über den Einheitspunkt ist dieser ein Punkt, welcher von den drei Coordinatenaxen je den Abstand $\frac{1}{2}$ besitzt. Ausserdem muss der Kegelschnitt die Linien $a = 0$ und $c = 0$ im Punkte $0, 0, 1$ bez $1, 0, 0$ berühren. Durch diese Bedingungen ist der Kegelschnitt eindeutig bestimmt. Nun genügt aber der in der Figur verzeichnete Kreis vom Radius $\frac{1}{2}$ je,



nen Bedingungen. Mithin wird vermöge unserer besonderen Annahme der Coordinatensysteme der fundamentale Kegelschnitt zum Einheits-Kreise.

Im Übrigen ist diese Spezialisirung der Coordinatensysteme ganz unwesentlich, und geschieht lediglich aus Bequemlichkeitsrücksichten. Es kann also jede Übergang in der projectiven Geometrie empfohlen werden, die folgenden Constructionen bei einer beliebigen Hyperbel durchzuführen.

Wir wollen die Punkte des Kreises durch einen Parameter individualisiren. Zu dem Zweck schreiben wir die Gleichung des Kreises in die Form:

$$\frac{x}{2a} = \frac{2c}{b} = -\omega$$

oder

$$2a : -b : 2c = 1 : \omega : \omega^2,$$

womit die Parameterdarstellung des Kreises geleistet ist.

Wir legen ferner die Tangente an den Kreis im Punkte $x', \bar{x}', c'$. Ihre Gleichung ist

$$b\,b' - 2\,a\,c' - 2\,a'\,c = 0,$$

wo a, b, c die laufenden Coordinaten einer Tangentenpunktes sind. Bedeutet ω den zum Berührungspunkte gehörigen Parameter, so können wir die Gleichung der Tangente auch schreiben:

$$a\,\omega^2 + b\,\omega + c = 0.$$

Hieraus berechnet man

$$\omega = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

als Parameter derjenigen beiden Punkte des Kreises, nach welchen vom Punkte a, b, c aus Tangenten verlaufen. Daran schliessen sich zwei Bemerkungen an: 1.) Im Innern des Kreises muss $b^2 - 4ac$ negativ, im Aussern positiv sein; denn die von einem innern bez. äusseren Punkte auslaufenden Tangenten sind imaginär bez. reell.

Für die quadratischen Formen bedeutet dies Folgendes: <u>Die definiten Formen finden im Innern des Kreises, die indefiniten ausserhalb desselben ihre Interpretation</u> 2.) Setzen

wir $w = \frac{x}{y}$, so geht die Gleichung der Tangente über in

$$a x^2 + b x y + c y^2 = 0$$

Daraus folgt: die beiden Wurzeln von $\frac{x}{y}$, welche wir durch Nullsetzen der quadratischen Form erhalten, sind die Parameter w derjenigen beiden Kreispunkte, in denen die vom Punkte a, b, c ausgehenden Tangenten den Kreis berühren. Hieraus folgt, dass w bei der auf pg. 175 gegebenen Collineation einerseits die lineare Substitution $w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$ erfährt. Collineation und Substitution sind wechselseitig eindeutig an einander gebunden.

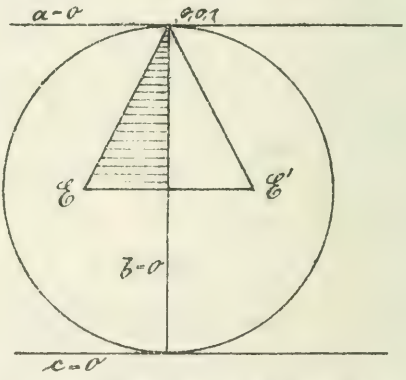
2. Die definiten quadratischen Formen und die Punkte im Innern des Kegelschnittes.

Wir wenden uns nun speciell zu den definiten Formen, studiren also das Innere des Kreises. Hier grenzen

wir uns zunächst den Raum für die reducirten Formen ab: Nehmen wir in den die reducirten Formen definirenden Bedingungen

$$|b| \leqq a \leqq c$$

die Gleichheitszeichen, so erhalten wir die Begrenzung der gesuchten Raumes: Dieselbe wird gebildet von den Geraden $b = a$, $b = -a$ und $a = c$. Die Gerade $b = a$ ist die Verbindungslinie der Punkte 0, 0, 1 mit dem Einheitspunkte $\bar{E}$; ferner ist $b = -a$ die Verbindungslinie des Punktes 0, 0, 1 mit dem in Bezug auf $b = 0$ zu dem Punkte $\bar{E}$ symmetrisch gelegenen Punkte $\bar{E}'$. Endlich ist $a = c$ die Gerade $\bar{E}\bar{E}'$. Das von diesen drei Geraden eingeschlossene Dreieck bildet den „reducirten Raum" für die definiten Formen. Dies Dreieck wird



noch durch die Gerade $b = 0$ in zwei Teildreiecke zerlegt, von denen wir das eine schraffirt, das andere nicht schraffirt haben. wir nennen das einzelne dieser beiden Dreiecke ein „Fundamentaldreieck."

Nun gibt es, wie wir wissen, zu jeder definiten quadratischen Form eine und im Allgemeinen auch nur eine reducirte Form, welche mit ihr aequivalent ist. Mit anderen Worten: es ist möglich einen jeden Punkt des Kreisinnern durch eine der $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ Collineationen in einen und im Allgemeinen auch nur in einen Punkt der reducirten Raumer hineinzubringen. Wenden wir umgekehrt alle die unendlich vielen Collineationen $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ auf den reducirten Raum an, so erhalten wir eine unendliche Anzahl von weiteren Dreiecken. Dieselben müssen nach dem eben Gesagten das Innere des Kreises lückenlos und einfach überdecken.

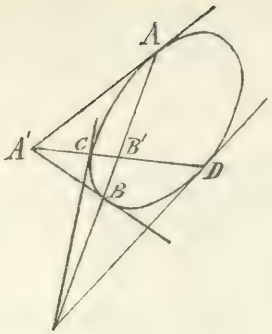
Frei. d. 10. I. Die so entstehende Figur

hat in der vorliegenden Theorie und im Anschlusse daran z. B. auch in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen eine fundamentale Bedeutung. Um die Figur vollständig zu entwickeln, lösen wir erst eine etwas andere Aufgabe, nämlich wir construiren auf der Peripherie des Kreises eine Scala der in dem Parameter ω rationalen Punkte. Dabei gehen wir von den drei Punkten $\omega = 0, \infty, 1$ aus. In unserer Kreisfigur sind dieselben bez. die Punkte mit den homogenen Coordinaten $0, 0, 1;\ 1, 0, 0;\ 1, -2, 1$, d. h. drei Punkte in sehr specieller Lage. Wir können aber ebenso gut von drei beliebigen Punkten auf einem beliebigen Kegelschnitt ausgehen, diesen Punkten die Parameter $0, \infty, 1$ beilegen, und nach denjenigen Punkten fragen, welche in Bezug auf sie rational sind. In der That brauchen wir nur zwei der gegebenen Punkte herauszugreifen und in diesen die Tangenten an den gegebenen Kegelschnitt zu legen. Dann liefern uns diese Tangenten zusammen mit der Berührungssehne

ein Coordinatendreieck, in Bezug auf welches der Kegelschnitt die Gleichung $b^2 - 4ac = 0$ annimmt. Bestimmen wir jetzt den Parameter w so, wie es oben geschehen, so erhalten die zwei auf dem Kegelschnitt gelegenen Ecken des Coordinatendreiecks die Parameter $w = 0$ und $w = \infty$. Durch passende Wahl der Einheitspunktes können wir dann noch erreichen, dass der dritte der gegebenen Punkte den Parameter $w = 1$ erhält. Indem wir in solcher Weise von einem allgemeinen Kegelschnitt und drei beliebigen Punkten A, B, C auf ihm ausgehen, haben wir den Vorteil, dass die projective Bedeutung der jetzt zu beschreibenden Constructionen klarer wird, wie wenn wir an unserer speciellen Figur operiren würden.

Bei allen Constructionen der projectiven Geometrie ist der fundamentale Process dieser: <u>Zu 3 gegebenen Elementen A, B, C das 4te harmonische D zu construiren. Sind</u>

die Elemente A, B, C Punkte einer Gera-
den oder Strahlen eines Büschels, so
ist die Construction des 4ten harmonischen
vollauf bekannt. Liegen aber die Punkte
A, B, C wie hier auf einem Kegelschnitt,
so müssen wir zuerst definiren, wann
wir vier Punkte eines Kegelschnitts harmo-
nisch nennen wollen. Diese Definition
stützt sich auf den Satz, dass das Dop-
pelverhältnis von 4 Strahlen, welche
irgend vier Punkte des Kegelschnitts von
einem 5ten Punkte des Kegelschnitts aus
projiciren, unabhängig ist von der Lage
dieses Punktes. Man bezeichnet allgemein
als Doppelverhältnis von vier Punk-
ten des Kegelschnitts eben das Dop-
pelverhältnis von vier solchen pro-
jicirenden Strahlen. Hiernach können
wir entscheiden, wann vier Punkte
A, B, C, D auf dem Kegelschnitt
harmonisch liegen, d. h. wann das
Doppelverhältnis der projicirenden
Strahlen gleich -1 ist. Wir behaupten:
Die Punkte liegen harmonisch, wenn
die Verbindungslinien AB und



C D conjugirte Polaren sind. In diesem Falle ist nämlich A' (vergl. die Figur), der Pol von A B, auf C D gelegen. Projiciren wir nun die Punkte A, B, C, D spe. ciell von A aus, so ergeben sich als pro. jicirenden Strahlen die Geraden A C, A D, A A', A B'. Dieselben sind harmonisch weil es ihre Schnittpunkte C, D, A', B' mit der Geraden C D nach Voraus. setzung sind. Also liegen auch die Punkte A, B, C, D harmonisch, w. z. b. w.

Hiernach stellt sich die Construction des zu A, B, C gehörigen vierten har. monischen Punktes D folgendermaßen. Wir construiren den Pol A' zu der Ge. raden A B und verbinden A' mit C. Der zweite Schnittpunkt der Ge. raden A'C mit dem Kegelschnitt ist der gesuchte Punkt D.

Daneben stellen wir das analytische

Kriterium für die harmonische Lage.

Eine Gerade, welche die Punkte $a=0$, $b=0$ und $a=a'$, $b=b'$ verbindet, hat die Gleichung

$$ab' - ba' = 0.$$

Ist a', b' ein Punkt des Kegelschnittes mit dem Parameter ω, so wird zufolge der Einführung des Parameters ω $a' : -b' = 1 : 2\omega$. Mithin lauten die Gleichungen derjenigen vier Strahlen, welche die Punkte ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 mit der auf dem Kegelschnitt gelegenen Coordinatenecke $a=0$, $b=0$ verbinden:

$$b + 2\omega_1 a = 0$$
$$b + 2\omega_2 a = 0$$
$$b + 2\omega_3 a = 0$$
$$b + 2\omega_4 a = 0$$

Das Doppelverhältniss dieser vier Strahlen hat bekanntlich den Wert

$$\lambda = \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_4} : \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_4}$$

Setzen wir noch homogen machend

$$\omega_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad \omega_2 = \frac{x_2}{y_2},$$

so können wir unter Einführung von zwei neuen Parametern μ und ν schreiben

$$w_3 = \frac{x_1 + \mu x_2}{y_1 + \mu y_2} \quad , \quad w_4 = \frac{x_1 + \nu \cdot x_2}{y_1 + \nu \cdot y_2}$$

Dann findet man durch einfache Umrechnung

$$\lambda = \frac{\mu}{\nu}$$

Soll also $\lambda = -1$ werden, so muss $\nu = -\mu$ sein. Hiernach können wir das analytische Kriterium für die harmonische Lage folgendermaßen formulieren: Sind 3 Punkte der Kegelschnitte mit den Parametern

$$w_1 = \frac{x_1}{y_1} \quad , \quad w_2 = \frac{x_2}{y_2} \quad , \quad w_3 = \frac{x_1 + \mu x_2}{y_1 + \mu y_2}$$

gegeben, so ist der zugehörige vierte harmonische Punkt der folgende:

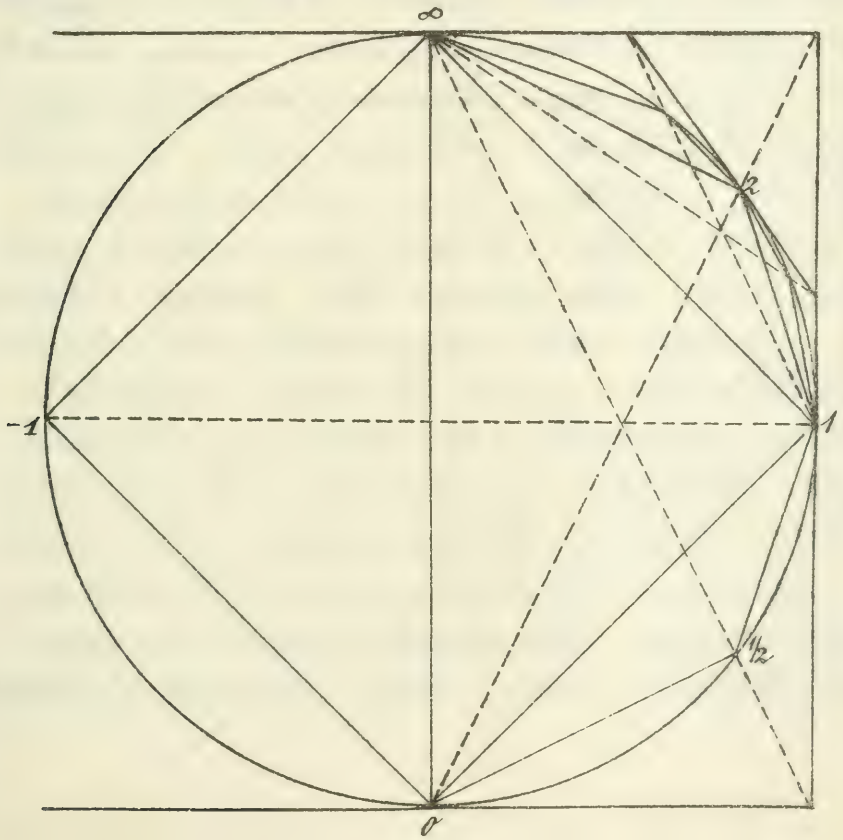
$$w_4 = \frac{x_1 - \mu x_2}{y_1 - \mu y_2} \, .$$

Es ist klar, dass wenn wir von rationalen Punkten w_1, w_2, w_3 ausgehen, wir durch unsere Construction und die parallel laufende Rechnung

immer wieder zu rationalen Punkten ge-
führt werden.

Wir gehen nun auf unsere specielle Kreis-
figur zurück und construiren zu
den Punkten 0, 1, ∞ auf alle Weisen
den vierten harmonischen Punkt, indem
wir unsere Construction auf den vor-
liegenden Fall specialisiren.
Wir suchen also die Pole bez. zu den
Geraden 0, 1; 1, ∞; ∞, 0 auf und ver-
binden diese bez. mit den Punkten
∞, 0, 1. Die zweiten Schnittpunkte der
Verbindungslinien mit dem Kreise
liefern uns die drei 4ten harmonischen
Punkte, welche bei veränderter Reihenfolge
der Punkte 0, 1, ∞ möglich sind. Jene
drei Verbindungsgeraden — wir können
sie die „Hülfsgeraden" nennen — schneiden sich,
wie man sieht, in einem Punk-
te. Es folgt dieses aus dem Brian-
chon'schen Satze, nach welchem sich
bekanntlich in jedem einem Ke-
gelschnitt umschriebenen Sechsecke
die 3 Verbindungslinien gegenüberlie-
gender Ecken in einem Punkte tref-

fen. Läßt man nämlich das allgemeine Sechseck in die drei doppelt zu zählenden Tangenten in den Punkten 0, 1, ∞ ausar-ten, so gehen die drei Verbindungslinien, von welchen der „Brianchon'sche Satz spricht in unsere drei Hülfsge-raden über. Den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Hülfsgeraden können wir etwa als den „Mittelpunkt" des Dreiecks 0, 1, ∞ bezeichnen. Analytisch sind die drei



neuen auf der Kreisperipherie construirten Punkte nach der soeben abgeleiteten Formel für das Doppelverhältniss durch die Parameter $\frac{1}{2}$, 2, -1 bestimmt.

Zu unserem Ausgangsdreiecke $0\ 1\ \infty$ haben wir durch diese Construction 3 neue Dreiecke hinzugezeichnet, nämlich die Dreiecke $\infty, 2, 1;\ 1, \frac{1}{2}, 0;\ 0, -1, \infty$. Jetzt wiederholen wir dieselbe Construction mit jedem dieser neuen Dreiecke. Wir finden dann je zwei neue Punkte des Kreises und dementsprechend je zwei neue Dreiecke. Indem wir so fortfahren, bilden wir einen geometrischen Algorithmus aus, durch welchen wir successive das ganze Innere des Kreises mit Dreiecken und die ganze Peripherie mit Punkten erfüllen, (welche dieselbe ersichtlich überall dicht bedecken). Jeder Dreieck ist dabei durch seine 3 Hülfsgeraden, die sich in seinem Mittelpunkte kreuzen, in sechs Unterdreiecke zerlegt. Die Frage wird sein, welche w Werte

den construirten Dreiecksecken zugehö-
ren, überhaupt wie sich unser geome-
trischer Process im analytischen Ge-
wande darstellt.

To. d. 16. I. 96. Hierbei können wir uns auf denjenigen Teil der Figur beschränken, welcher rechts von der Geraden $0\,\infty$ liegt und welcher die Punkte mit positivem Parameter w enthält. Die Verteilung des Parameters in der lin-
ken Hälfte der Figur ist nämlich eine ganz analoge: hier befinden sich die Punkte mit negativem w, wobei der Punkt $-w$ aus dem Punkte $+w$ durch eine Umklappung um die Gerade $0\,\infty$ hervorgeht.

Wir fragen also nach dem arithmetischen Charakter derjenigen positiven w-Werte, welche zu den bei unserer Construction successive erreichten Dreiecken gehören. Zunächst ist klar, daß alle diese Werte rationale Zahlen sind, denn einerseits sind es die Ausgangswerte $0, \infty, 1$, andererseits ist die Construction des vierten har-
monischen Punktes eine rationale Opc.

ration. Wir schreiben daher die Parameter in die Form $\frac{a}{b}$, wobei wir die Spaltung des w in Zähler und Nenner allemal so vornehmen, dass diese positiv sind und keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Für die Punkte $w = 0$ und $w = \infty$, wo diese Spaltung unbestimmt wird, setzen wir die Zerlegungen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$ fest. Es seien nun $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die beiden Eckpunkte einer Seite irgend eines unserer Constructionsdreiecke, wobei $\frac{a}{b}$ derjenige der beiden Eckpunkte sein möge, welcher den grösseren Parameter besitzt, so dass $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Gehen wir in der Construction einen Schritt weiter, so legt sich an die genannte Dreiecksseite ein neues Dreieck an, welches einen neuen rationalen Punkt unserer Scala liefert. Wir behaupten dann:

1.) <u>Für die beiden Eckpunkte $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gilt die Relation</u>

$$\underline{a\,d - b\,c = 1}$$

2.) <u>Der Parameter der dritten Ecke des neuen Dreiecks berechnet sich aus den Parametern $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ der beiden</u>

anderen Ecken nach der Formel:

$$w = \frac{a+c}{b+d}$$

Diese Behauptungen beweisen wir durch vollständige Induction. Was zunächst die Ausgangspunkte $\frac{a}{b} = \frac{1}{0}$ und $\frac{c}{d} = \frac{0}{1}$ betrifft, so genügen diese der Relation 1); auch hat der durch unsere Construction zunächst gelieferte Punkt $\frac{1}{1}$ die sub 2) angegebene Form $w = \frac{1+0}{0+1}$. Indessen war die Benennung dieser drei Punkte doch nur eine conventionelle; sie ergab sich nicht als nothwendige Folge aus unserer Construction. Um daher die Richtigkeit unserer Angaben für den ersten Schritt des Verfahrens darzuthun, gehen wir auf die Dreiecksseite $\frac{a}{b} = \frac{1}{0}$, $\frac{c}{d} = \frac{0}{1}$ ein und betrachten ausserdem den Punkt $w = \frac{1}{2}$. Für diese bestehen die Behauptungen 1) und 2) ersichtlich gleichfalls zu recht. Wir nehmen nun an, dass wir durch eine beliebige Anzahl von Constructionen zu einem Dreiecke gelangt sind, dessen Eckpunkte,

den angegebenen Regeln entsprechend die Parameter haben.

$$\frac{a}{b}\,,\ \frac{c}{d}\,,\ \frac{a+c}{b+d} \quad \text{mit } ad-bc=1$$

An dieses Dreieck setzen sich durch eine abermalige Wiederholung unserer Construction zwei neue Dreiecke an. Wir betrachten dasjenige Dreieck, welches mit dem vorhergehenden die Seite $\frac{a+c}{b+d}$ bis $\frac{c}{d}$ gemein hat. Die Frage wird sein, ob auch die Ecken dieses Dreiecks den angegebenen Regeln genügen. Zwei seiner Ecken sind uns bekannt, es sind dieser die Punkte $\frac{a+c}{b+d}$ und $\frac{c}{d}$. Wir bezeichnen dieselben jetzt kürzer mit $\frac{a'}{b'}$ bez. $\frac{c'}{d'}$, und bemerken, dass wir danach statt $\frac{a}{b}$ auch schreiben können: $\frac{a'-c'}{b'-d'}$.

Es ist nun erstlich

$$a'd'-b'c'=(a+c)d-(b+d)c=ad-bc=1,$$

so dass die Behauptung 1) auch für das neue Dreieck richtig ist. Die dritte Ecke des in Rede stehenden Dreiecks ist unserer Construction zufolge als vierter harmonischer Punkt zu den Ecken

$$\frac{a'}{b'}, \frac{c'}{d'} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{a'-c'}{b'-d'}$$

bestimmt. Nach pag. 191 hat dieser vierte harmonische Punkt daher den Parameter

$$\frac{a'+c'}{b'+d'}$$

Damit ist auch die Richtigkeit unserer Behauptung 2) für das neue Dreieck bewiesen. Mithin gelten unsere obigen Regeln überhaupt für jeder Dreieck, welches durch beliebige Wiederholung unserer Construction erreicht wird.

Den Kernpunkt dieser Beweises erblicken wir darin, dass nach Verabredung die Spaltung der Parameterwerte in einen Zähler und Nenner ohne gemeinschaftlichen Teiler erfolgte. Hierauf stützten wir uns wesentlich im Vorstehenden, indem wir aus der Gleichung $\frac{a'}{b'} = \frac{a+c}{b+d}$ folgerten:

$$a' = a+c, \; b' = b+d.$$

Wir betrachten einmal die ganze Reihe der nach einer gewissen Anzahl von Constructionen erreichten positiven Parameterwerte. Sie möge

aus den folgenden Brüchen bestehen:

$$\frac{1}{0}, \ldots \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots\ldots, \frac{0}{1}.$$

Diese Reihe liefert uns die bis zu einem gewissen Grade der Dichtigkeit gediehene Scala unserer rationalen Punkte. Dabei gilt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Werten der Reihe die Relation $ad - bc = 1$. Wollen wir die Scala weiter vervollständigen, so haben wir die Werte $\frac{a+c}{b+d}$ zwischenzuschalten. Mit Reihen dieser Art beschäftigt sich Hurwitz im 44ten Bande der Mathem. Annalen (1894). Er nennt dieselben Farey'sche Reihen (nach dem englischen Mathematiker Farey, welcher von der Theorie der musikalischen Intervalle ausgehend auf diese Reihen geführt wurde).

Wir fragen nun weiter, welche rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ bei unserer Construction als Dreiecksseiten auftreten. Die Antwort hierauf lautet einfach folgendermassen: Unser Process liefert successive alle rationa

len Zahlen $\frac{a}{b}$ und alle rationalen Zahlenpaare $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ von der Determinante $ad - bc = 1$. Den Beweis hierfür knüpfen wir an die uns bekannten Sätze über Kettenbruchentwicklung an. Indem wir eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch entwickeln, construiren wir eine Reihe von Näherungsbrüchen $\frac{p}{q}$, zwischen welchen die Recursionsformeln bestehen.

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{a_r p_{r-1} + p_{r-2}}{a_r q_{r-1} + q_{r-2}} .$$

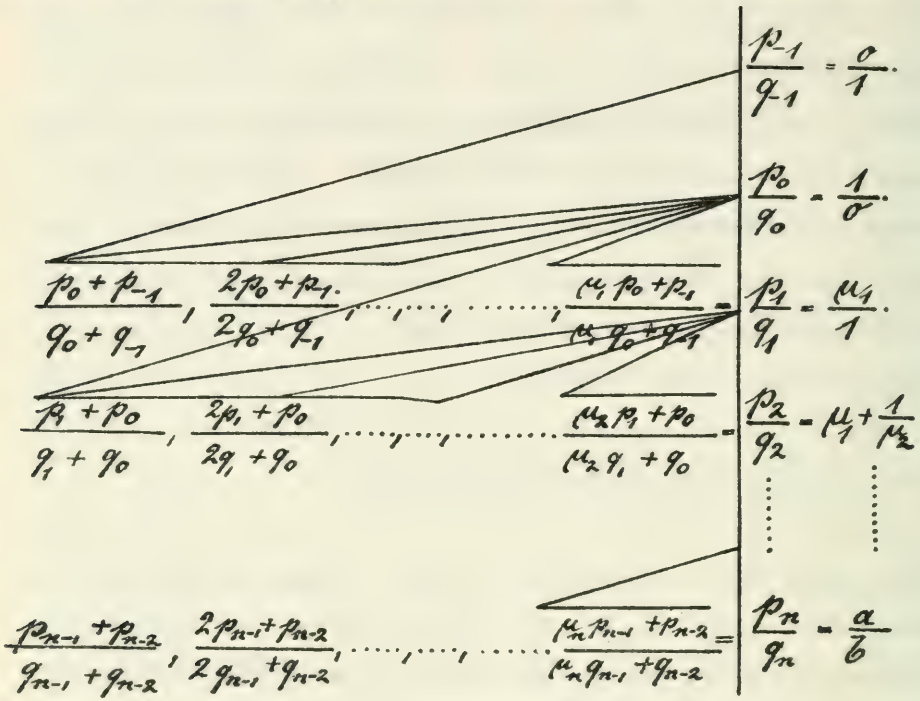
Ausser diesen, den sog. Hauptnäherungsbrüchen, betrachten wir die Nebennäherungsbrüche, welche durch die Formel gegeben waren

$$\frac{\varrho p_{r-1} + p_{r-2}}{\varrho q_{r-1} + q_{r-2}} \qquad \varrho = 1, 2, \cdots (a_r - 1).$$

Die Reihe der Näherungsbrüche begann mit den fingirten Brüchen

$$\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{0}{1}, \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{0} .$$

Die Gesammtheit dieser Brüche können wir in das folgende Schema anordnen:



Dabei berechnet sich jeder Näherungsbruch aus zwei anderen Näherungsbrüchen, vermöge der oben angegebenen Recursionsformeln in der Weise, dass Zähler und Nenner jenes gleich der Summe in Zähler und Nenner dieser wird. Drei in solcher Weise zusammengehörige Brüche

sind in unserm Schema durch Verbin-
dungslinien gekennzeichnet. Sie erschei-
nen hier als Ecken eines Dreiecks. An-
dererseits schreiten wir bei der Construc-
tion der rationalen Punkte auf der
Kreisperipherie von einem Dreieck
zu einem nächsten fort, wobei die
Ecken eines jeden dieser Dreiecke
ebenfalls nach dem gerade genannten
Gesetze zusammengehören. Die
sämtlichen Dreiecke unseres Schemas
sind daher im Sinne unserer Con-
struction, Farey'sche Dreiecke' und die
sämtlichen Zahlen unseres Schemas
bezeichnen Punkte der Kreisperiphe-
rie, welche für unsere Construction
erreichbar sind. Insbesondere ist
$\frac{a}{b}$ ein solcher Punkt. Nun ist aber $\frac{a}{b}$
eine ganz beliebige rationale Zahl,
weil doch eine beliebige rationale
Zahl in einen Kettenbruch entwickelt
werden kann. Mithin ist jeder in
sich rationale Punkt der Kreis-
peripherie für unsere Construc-
tion erreichbar. Hiermit ist

der erste Teil unserer obigen Aussage bewiesen. Es hat sich nebenbei die interessante Thatsache ergeben, daß die Reihe der Hülfspunkte, welche wir bei unserer Construction berühren müssen, um zu dem vorgelegten rationalen Werte von w zu gelangen, übereinstimmt mit den Näherungsbrüchen in der Kettenbruchentwickelung dieser Werte.

Die in unserm Schema verlaufenden Verbindungslinien deuten noch eine andere Eigenschaft der Näherungsbrüche, nämlich den Determinantensatz der Kettenbruchentwickelung, an. Es haben nämlich je zwei Näherungsbrüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die Determinante $a\,d - b\,c = +1$, wenn $\frac{a}{b}$ an dem unteren, $\frac{c}{d}$ an dem oberen Ende einer Verbindungslinie steht. Umgekehrt wird jede Lösung c, d der Diophantischen Gleichung $a\,d - b\,c = 1$, in welcher wir uns a und b irgendwie teilerfremd gegeben denken, wie wir früher

zeigten durch einen Näherungsbruch der Kettenbruchentwickelung von $\frac{a}{b}$ geliefert. Die beiden Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ erscheinen daher in unserem Schema als Endpunkte einer Verbindungslinie. Alle Verbindungslinien unseres Schemas ergeben aber bei der Construction am Kreise Dreiecksseiten. Daher muss jeder Zahlenpaar $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, welches der Diophantischen Gleichung $ad-bc=1$ genügt, in unserer Construction als Begrenzung einer Dreiecksseite auftreten. Hiermit ist auch der zweite Teil unserer obigen Behauptung erwiesen.

Wir führen noch im Anschluss an Hurwitz eine bequeme Bezeichnung ein. Wir nennen die Verbindungslinie zweier Punkte $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ der Kreisperipherie, wenn sie der Gleichung $ad - bc = +1$ genügen, eine <u>Elementarsehne erster Art</u>.

Das zuletzt Bewiesene können wir hiernach so ausdrücken: Die Gesammtheit der Elementarsehnen

erster Art der Kreises fällt mit der Gesammtheit der Dreiecksseiten bei unserer Construction zusammen. Wir bezeichnen ferner als <u>Elementarsehne zweiter Art</u> die Verbindungslinie zweier Punkte $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{c'}{d'}$ des Kreises von der Determinante $a'd' - b'c' = 2$. Es zeigt sich, dass die Hilfsgeraden unserer Construction solche Elementarsehnen zweiter Art sind, und dass wieder die Gesammtheit der Elementarsehnen zweiter Art mit der Gesammtheit der Hilfsgeraden zusammen fällt.

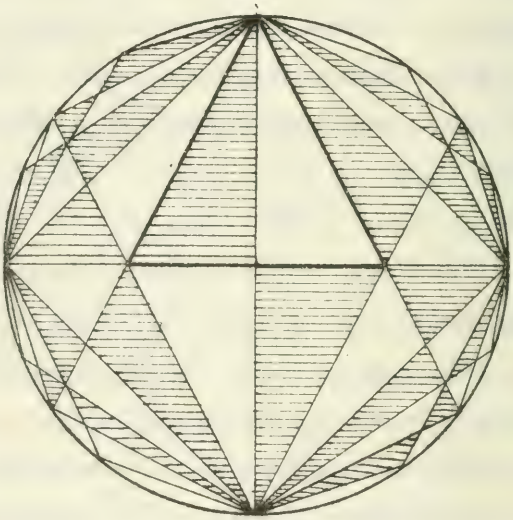
Fr. 17. I. 96. Wir bringen heute an unserer bisherigen Figur noch einen scheinbar äusserlichen Zusatz an, wir werden dadurch erreichen, dass uns dieselbe ausser der Scala der rationalen Punkte auch die Einteilung der Kreisinneren in eine unendliche Anzahl unter sich aequivalenter Parzellen zur Erscheinung bringt.

Wir bemerken nämlich, dass jedes unserer Constructionsdreiecke durch

die Hülfsgeraden in 6 Unterdreiecke geteilt wird. Diese Unterdreiecke wollen wir abwechselnd schraffiren, so dass sich jedes schraffirte Dreieck mit seinen 3 Seiten an 3 nichtschraffirte Dreiecke anlegt und umgekehrt. Es stossen dann in den „Mittelpunkten" der Constructionsdreiecke je 3 schraffirte Dreiecke zusammen, in den „Mittelpunkten" der Seiten jener Dreiecke (wenn wir so diejenigen Punkte jener Seiten bezeichnen, in welchen dieselben von den durch den gegenüberliegenden Eckpunkt gehenden Hülfsgeraden geschnitten werden) je zwei und in den Ecken der Constructionsdreiecke je unendlich viele schraffirte Dreiecke zusammen. Fn's Besondere liefern ein gewisses schraffirtes und ein gewisses nichtschraffirtes Dreieck zusammen gerade das pg. 184 abgegrenzte reducirte Gebiet, vergl. überall die Figur der folgende Seite.

Es ist nun möglich, jedes schraffirte bez. nicht schraffirte Dreieck unserer

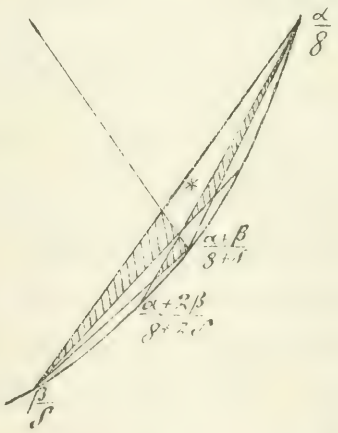
Figur durch eine und nur durch eine Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ in den schraffirten bez. nichtschraffirten Teil der reducirten Raumes zu transformiren. Und umgekehrt gibt es zu jeder solchen Substitution ein und auch nur ein schraffirtes und nicht schraffirtes Dreieck unserer Figur, welches durch jene Substitution in den reducirten Raum verlegt wird.



Zum Beweise greifen wir irgend ein Dreieck unserer Figur heraus. Dasselbe ist ein Unterbestandteil einer der Construktionsdreiecke, eine Seite derselben fällt in eine Seite dieses Dreiecks, also in eine Elementarsehne erster Art, während seine beiden anderen Seiten

Stücke von Hilfsgeraden, also von Elementarsehnen zweiter Art sind. Es handle sich etwa um das mit einem * versehene nicht schraffirte Dreieck. (vergl. d. f. Figur). Die Endpunkte der zum Dreiecke gehörigen Elementarsehne erster Art seien $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$. Die Endpunkte der beiden Elementarsehnen zweiter Art sind dann: $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\alpha+2\beta}{\beta+2\delta}$ bez. $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$ und $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$.

Andererseits ist der nicht schraffirte Teil des reducirten Raumes von der Elementarsehne erster Art $\infty, 0$ und den Elementarsehnen zweiter Art $\infty, \frac{1}{2}$ und $1, -1$ begrenzt. Wir betrachten daher die folgenden Punktepaare samt den sie verbindenden Geraden:



einer seits $\begin{cases} \frac{\alpha}{\gamma} , & \frac{\beta}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\gamma} , & \frac{\alpha+2\beta}{\gamma+2\delta} \\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} , & \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} \end{cases}$ anderer seits $\begin{cases} \infty , & 0 \\ \infty , & \frac{1}{2} \\ +1 , & -1 \end{cases}$

Wir können nun unmittelbar eine lineare Transformation angeben, welche die Punkte der ersten Serie in die daneben stehenden Punkte der zweiten Linie überführt. Wir haben nämlich, wenn w irgend einen der ersteren, w' irgend einen der letzteren Punkte bedeutet:

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta} .$$

Aber mit dieser Substitution, resp. der durch sie gegebenen Vertauschung der Kegelschnittpunkte ist nach pg. 183 eine Collineation der ganzen Ebene, die den Kegelschnitt in sich überführt, notwendig verbunden, nämlich die Collineation

$$\begin{aligned} \varrho a' &= \alpha^2 . a + \alpha\gamma . b + \gamma^2 . c , \\ \varrho b' &= 2\alpha\beta . a + (\alpha\delta + \beta\gamma) . b + 2\gamma\delta . c , \\ \varrho c' &= \beta^2 . a + \beta\delta . b + \delta^2 . c . \end{aligned}$$

Diese führt die Verbindungslinie von $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ in die Verbindungslinie von $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ etc., d. h. unser nicht-schraffirtes Dreieck in die nicht schraffirte Hälfte des reducirten Raumes über. Da aber jenes Dreieck ein ganz beliebiges Dreieck unserer Construction darstellt, so erhalten wir das Resultat: <u>dass jedes beliebige (schraffirte oder nicht schraffirte) Dreieck in das (schraffirte oder nicht-schraffirte) Dreieck des reducirten Raumes durch eine Collineation unserer Gruppe verwandelt werden kann.</u>
Diese Collineation ist auch eindeutig bestimmt, wie aus den hingeschriebenen Formeln hervorgeht.
Andererseits wird jede Collineation unserer Gruppe, bez. jede w-Substitution

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$$

ein Dreieck unserer Einteilung in das entsprechende Dreieck des reducirten Gebietes (nach dem Schema von pg. 210 oben) überführen. <u>Es werden also</u>

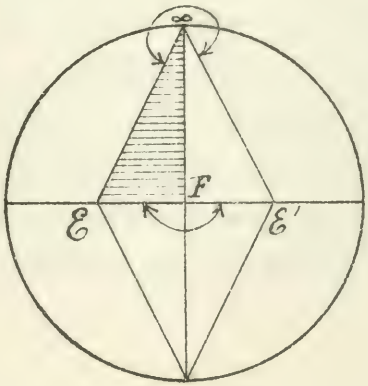
auch alle Substitutionen der Gruppe dadurch erschöpft, daß wir verlangen, alle Dreiecke der Figur in das reduzierte Gebiet zu verlegen.

Wenden wir umgekehrt auf das reduzierte Gebiet die Gesamtheit unserer Collineationen an, so müssen wir die Gesamtheit unserer Dreiecke erhalten. Durch diese Bemerkungen ist die Berechtigung der Benennung: reduciertes Gebiet: auf's neue dargethan. Wir erkennen nämlich:

Es ist jeder Punkt der Kegelschnittlinie einem bestimmten Punkte des reduzirten Gebietes aequivalent und umgekehrt. Sind keine zwei Punkte des reduzirten Gebietes unter sich aequivalent. Die Punkte des reduzirten Dreieckes stellen also alle reduzirten Formen mit $D < 0$ und jede nur einmal vor. Dieselbe Aussage können wir auch so formuliren: Das reduzirte Gebiet bildet für das Kegelschnittnetz einen Fundamentalbereich der Gruppe unserer $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ Substitu-

tionen.

Die letzten Aussagen verlangen, wenn sie vollständig richtig sein sollen, noch eine schärfere Abgrenzung des reducirten Gebietes. Wir bemerken nämlich, dass unser reducirtes Gebiet, wie wir es bisher definirt haben, d. h. das Dreieck ∞, E, E' schlechthin, gewisse Punkte, nämlich die Randpunkte enthält, welche unter sich aequivalent sind. Es entspricht dies bei unserer vorhergehenden Deduction dem Umstande, dass wir diese Randpunkte entweder dem reducirten Bereiche selbst oder einem seiner Nachbarbereiche zurechnen können. Wir betrachten die projective Beziehung $\omega' = \omega + 1$ der Kreisperipherie in sich; dieselbe führt die Punkte $\infty, -\frac{1}{2}$ des Kreises in die Punkte $\infty, +\frac{1}{2}$ über. Die zugehörige Collineation der Ebene bringt also die Seite ωE unseres Dreieckes in die Seite $\omega E'$. Die Substitution



$w' = w - 1$ bewirkt das Umgekehrte. Wir betrachten ferner die Substitution $w' = -\frac{1}{w}$, welche gleichfalls eine $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ Substitution ist. Dieselbe macht aus den Punkten $-1, +1$ der Kreises die Punkte $+1, -1$; sie führt also die Seite $E''E'$ unseres Dreiecks in sich über u. zw. in der Weise, daß die eine Hälfte FE'' derselben in die andere Hälfte FE' übergeht und umgekehrt. Die Randpunkte des Dreiecks sind also paarweise durch gewisse $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ Collineationen einander zugeordnet, sie sind paarweise aequivalent.

Wir deuten dieses in der Figur durch die Doppelpfeile an. Soll unser reducirtes Dreieck im präcisen Sinne des Wortes ein Fundamentalraum sein, d. h. soll es nur nicht-aequivalente Punkte enthalten, so dürfen wir demselben nur den einen Teil der Ränder, etwa den zum schraffirten Dreieck gehörigen Rand hinzurechnen, während wir den anderen Teil der Ränder den Nachbardreiecken zuweisen. Nach dieser Verschärfung ist jetzt der Satz ausnahmslos richtig:

daß jeder Punkt des Kreisinnern einen und nur einen aequivalenten Punkt im Fundamentalraum besitzt.

Wir werden dieselbe Verschärfung auch an der arithmetischen Definition der reducirten Formen anzubringen haben. Wir nannten eine definite Form (a, b, c) dann reducirt, wenn $|b| \leq a \leq c$ war. Dem Auftreten der Gleichheitszeichen in dieser Formel entspricht geometrisch, daß der bez. Punkt a, b, c auf den Rand des Fundamentalraumes rückt; er befindet sich, wenn $a = c$, auf der Geraden $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$, wenn $|b| = a$ auf den Geraden $\infty\mathfrak{E}$ oder $\infty\mathfrak{E}'$. Wenn wir also geometrisch dem reducirten Gebiete einen Teil seiner Randpunkte wegnahmen, so werden wir arithmetisch die Gültigkeit des Gleichheitszeichens unter Umständen ausschließen müssen. Nun ist, bei unserer Annahme über die Lage des Einheitspunktes in dem beibehaltenen Teile des Randes $b > 0$, in dem fortgelassenen $b < 0$. Dementsprechend werden wir die Gleichheitszeichen in

der obigen Formel nur im Falle $b > 0$ bestehen lassen und werden jetzt die folgende schärfere Definition der reducirten Formen aufstellen: Eine Form (a, b, c) ist im Falle $b > 0$ eine reducirte Form, wenn $b \leq a \leq c$, im Falle $b < 0$ aber dann, wenn $|b| < a < c$ ist. Nach dieser Verbesserung unserer ursprünglichen Definition können wir den Satz (welcher übrigens nur ein anderer Ausdruck für einen Satz der vorigen Seite ist) als ausnahmslos richtig aussprechen: dass in jeder Klasse aequivalenter definiter Formen immer nur eine reducirte Form enthalten ist.

Wir kommen noch auf die Frage nach den Automorphien der definiten Formen zurück, weil uns die hierbei in Betracht kommenden Verhältnisse aus unserer Figur unmittelbar entgegentreten. Wie wir wissen, hängt das Vorhandensein der Automorphien von den Lösungen t und u der Pell'schen Gleichung

$$t^2 + \Delta u^2 = 4$$

ab, wo $-\Delta = D$ die Discriminante der

vorgelegten Form ist. Die Automorphie selbst ist dann eine Substitution

$$x = \alpha X + \beta Y$$
$$y = \gamma X + \delta Y$$

mit folgendem Coefficientenschema:

$$\begin{vmatrix} \frac{t - bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t + bu}{2} \end{vmatrix}$$

Haben wir eine Discriminante $\Delta > 4$, so besitzt die Pell'sche Gleichung ersichtlich nur die trivialen Lösungen: $t = \pm 2$, $u = 0$, welche zu den Automorphien Anlass geben $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{vmatrix}$. Die Form geht also bei $\Delta > 4$ nur dann in sich über, wenn wir x und y entweder ungeändert lassen, oder beide gleichzeitig im Vorzeichen vertauschen. Ist dagegen $\Delta = 4$, so gibt es ein zweites Lösungspaar der Pell'schen Gleichung, nämlich $t = 0$, $u = \pm 1$, und dementsprechend zwei weitere Automorphien. Ist endlich $\Delta = 3$, so liefert jede der vier Vorzeichenkombinationen in $t = \pm 1$, $u = \pm 1$

eine Lösung der Pell'schen Gleichung. Zu den obigen Automorphien, die dem Lösungspaare $t = \pm 2$, $u = 0$ entsprechen, treten in diesem Falle noch 4 neue Automorphien hinzu. In den beiden letzt. genannten Fällen $\Delta = 4$ und $\Delta = 3$ giebt es je nur eine Formenklasse, weil es nur eine reducirte Form giebt. Es ist dieser bez. die Form

$$X^2 + Y^2 \text{ und } X^2 + XY + Y^2.$$

Wir sehen nun zu, wie sich das Vorhandensein der Automorphien in unserer Figur darstellt. Zu dem Zwecke müssen wir von der Substitution $\begin{pmatrix} x & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ der Variabeln x und y zu der entsprechenden Substitution der Variabeln a, b, c übergehen. Die Substitution $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist natürlich in jenen, wie in diesen Variabeln die identische Substitution. Ferner bedeutet die Substitution $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in den Variabeln a, b, c gleichfalls die Identität, wie aus den Formeln von pg. 178 sofort einleuchtet. Daher kommt das Vorhandensein dieser zweiten

Automorphie in unserer Figur nicht zum Ausdrucke. Überhaupt ändert das gleichzeitige Umkehren der Vorzeichen in den Coefficienten der Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ an der Collineation der Variabeln a, b, c durchaus nichts. Daher werden die 4 Automorphien im Falle $\Delta = 4$ und die 6 im Falle $\Delta = 3$ nur 2 bez. 3 verschiedene Collineationen in der Ebene der a, b, c ergeben können. Dass nun in der That 2 bez. 3 Collineationen vorhanden sind, bei denen die Form $X^2 + Y^2$ bez. $X^2 + XY + Y^2$ ungeändert bleibt, ersieht man aus unserer Figur. Die Form $X^2 + Y^2$ wird nämlich durch den Punkt 1, 0, 1 repräsentirt, den wir in der Figur von pg. 213 mit F bezeichnet haben, die Form $X^2 + XY + Y^2$ wird durch den Einheitspunkt E mit den Coordinaten 1, 1, 1 dargestellt. Im Punkte F stossen 2, im Punkte E 3 schraffirte (und ebensoviele nicht-schraffirte) Dreiecke zusammen. Die Collineationen, durch welche diese 2 bez 3 schraffirten Dreiecke in das

schraffirte Dreieck des reducirten Raumes verwandelt werden, sind die Automorphien der Form $X^2 + Y^2$ bez. $X^2 + XY + Y^2$. Das Vorhandensein und die Bedeutung der Automorphien im Falle $\Delta = 4$ und $\Delta = 3$ leuchtet also aus der Anordnung unserer Dreiecksfigur direct ein. Ebenso erkennen wir aus der Figur, dass es keine anderen Klassen definiter Formen mit aussergewöhnlichen Automorphien giebt als die genannten beiden.

Do. d. 23. I. Wir ziehen jetzt auch Substitutionen.

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

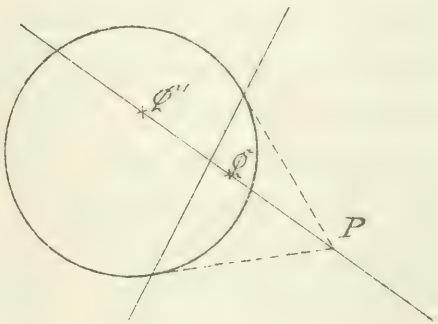
von der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ hinzu. Auch diese haben in unserer Figur eine einfache Bedeutung. Wir betrachten zunächst die specielle Substitution

$$\omega' = -\omega,$$

welche ersichtlich die Determinante -1 besitzt. Die zugehörige Collineation der a, b, c lautet nach pg. 210:

$$\varsigma a' = a,\ \varsigma b' = -b,\ \varsigma c' = c$$

und bedeutet eine gewöhnliche Spiegelung an der Mittellinie unserer Figur, eine Vertauschung von rechts und links. Das Wort Spiegelung werden wir im Folgenden jedoch in einem allgemeineren Sinne gebrauchen. Handelt es sich nicht, wie soeben um einen Durchmesser der Kreises, sondern um eine beliebige Sehne desselben, so verstehen wir unter Spiegelung eine Operation, welche man in der projectiven Geometrie als harmonische Perspective bezeichnet. Dieselbe wird folgendermaßen definirt: Man construire den Pol P der Sehne und ordne jedem Punkte A der Ebene denjenigen Punkt A' der Verbindungslinie PA zu, welcher mit A harmonisch liegt in Bezug auf den Pol P und den Schnittpunkt von



$P\,R$ mit der Polaren von P. Der Pol P bildet das „Centrum", unsere Sehne die „Axe" dieser Perspective. Diese Operation stellt die projective Verallgemeinerung der gewöhnlichen Spiegelung dar und geht in jene über, wenn wir die Sehne speciell in einen Durchmesser des Kreises rücken lassen.

Wir betrachten jetzt die Gesammtheit der Substitutionen von der Determinante ± 1. Dieselben bilden eine Gruppe, welche wir im Gegensatz zu der früheren <u>die erweiterte Gruppe</u> nennen. Wir erhalten übrigens diese ganze Gruppe, wenn wir zu der früheren Gruppe von Substitutionen mit der Determinante $+1$ noch die specielle Substitution $w' = -w$ von der Determinante -1 hinzunehmen. Denn wir können jede Substitution von der Determinante -1 durch Combination dieser speciellen mit einer Substitution von der Determinante $+1$ darstellen. (Der Deutlichkeit halber sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß die

zugehörigen Substitutionen der a, b, c auch jetzt die Determinante +1 haben, denn sie ist gleich $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$.)

Der Fundamentalbereich dieser erweiterten Gruppe besteht aus einem einzelnen schraffirten (oder nichtschraffirten) Dreieck, etwa aus dem schraffirten Dreieck des reducirten Raumes, in demselben Sinne, wie bei unserer früheren Gruppe der Fundamentalbereich von dem Doppeldreiecke des reducirten Raumes gebildet wurde. In der That zeigt sich, dass jeder Punkt des Kreisinnern durch eine Operation unserer Gruppe in das schraffirte Dreieck des reducirten Raumes verlegt werden kann, und dass keine zwei Punkte des schraffirten Dreiecks unter sich aequivalent sind. Man kann nämlich erstlich jeden Punkt durch eine $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ Substitution von der Determinante +1 in den reducirten Raum überhaupt überführen. Fällt er dabei in das nichtschraffirte Dreieck, so bringt man ihn durch die

Operation $w' = -w$ in das schraffirte Dreieck hinein. Fällt er in das schraffirte Dreieck, so ist das Gewünschte ohne dies erreicht. Dass auch keine zwei Punkte des schraffirten Dreiecks unter sich aequivalent sein können, ergibt sich aus der Erzeugung der erweiterten Gruppe mittelst der Operationen von der Determinante + 1 und der speciellen Operation $w' = -w$, deren Wirkung uns einzeln bekannt ist.

Die arithmetische Definition des neuen Fundamentalbereichs ist diese:

$$0 \leqq b \leqq a \leqq c$$

(wo überall die Gleichheitszeichen mitzählen).

Wir können jetzt die Construction unserer Figur nach einem neuen Prinzip beschreiben, indem wir die Operation der Spiegelung in dem oben festgestellten Sinne an die Spitze stellen. Wir gehen von dem schraffirten Dreieck des reducirten Raumes aus und bemerken, dass die 3 anliegenden nicht-schraffirten Dreiecke aus diesem durch

Spiegelung an der gemeinsamen Drei-
eckseite entstehen. Bei zweien dieser
Dreiecke ist das ohne weiteres klar,
weil es sich bei ihnen um eine ge-
wöhnliche Spiegelung handelt. Bei
dem dritten Dreiecke, wo die Spiege-
lung als harmonische Perspective
erklärt werden muss, folgt das Be-
hauptete aus der Entstehung unserer
Figur durch harmonische Construc-
tion. Wir betrachten sodann ei-
nes dieser drei nicht schraffirten
Dreiecke und die ihm anliegenden
drei schraffirten. Auch diese gehen
wegen der fundamentalen Eigenschaf-
ten unserer Figur aus dem nicht-
schraffirten durch Spiegelung an den gemein-
samen Dreieckseiten hervor. Dasselbe
gilt überhaupt für jedes Dreieck un-
serer Figur und die dasselbe umgebenden
drei Nebendreiecke, weil die Spiege-
lung eine projective Operation ist.
und weil jedes Dreieck unserer Fi-
gur mit jedem anderen projectiv
verwandt ist. Wir können daher die

ganze Figur dadurch successive entstehen lassen, dass wir jedes einzelne Elementardreieck, welches wir erhalten, immer auf's Neue an seinen Seiten spiegeln. Da alle Dreiecksseiten, zu denen wir so gelangen, Elementarsehnen sind, d. h. rationale Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ der Kreisperipherie verbinden, so werden alle unsere Spiegelungen ganzzahlige Substitutionen $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ u. zw. natürlich ganzzahlige Substitutionen von der Determinante -1. Speciell ist dabei $\alpha + \delta = 0$. Von hier aus bestätigt man sofort, dass jeder Punkt der Kegelschnittinnern mit jedem Punkte des schraffirten Elementardreiecks durch eine ganzzahlige Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ aequivalent ist, welche die Determinante $+1$ hat, wenn es sich um einen Punkt eines schraffirten Dreiecks, die Determinante -1, wenn es sich um einen Punkt eines nicht-schraffirten Dreiecks handelt. Die fragliche Substitution von der Determinante $+1$ oder -1 erhält man einfach durch Zusammen-

setzung einer geraden oder ungeraden Anzahl von Einzelspiegelungen, durch welche man von dem Elementardreieck des reducirten Gebietes zu demjenigen Dreieck hingelangt, welchem der gerade betrachtete Punkt angehört.

Wir fragen auch bei dieser erweiterten Gruppe nach den Automorphien. Zu dem Ende denken wir uns zu einem Punkte a, b, c die Gesammtheit seiner im Sinne der erweiterten Gruppe aequivalenten Punkte, d. h. das System seiner Spiegelpunkte hinzu. (Man denke an die Anordnung der Spiegelbilder bei einem Kaleidoskop.) Eine Automorphie liegt dann und nur dann vor, wenn zwei Punkte dieses Systems zusammenrücken. Da aber je zwei Spiegelpunkte durch eine Dreiecksseite getrennt werden, findet dieser nur dann statt, wenn der Punkt a, b, c in einer Dreiecksseite gelegen ist. In diesem Falle bleibt

unser Punkt bei zwei Operationen der erweiterten Gruppe ungeändert, nämlich bei der identischen Operation und bei der Spiegelung an der betr. Dreiecksseite. Ein specieller Fall hiervon ist es, wenn der Punkt in eine Dreiecksecke hineinrückt. Alsdann rücken aus dem System der aequivalenten Punkte 4, 6 oder gar unendlich viele Punkte in dieselbe Ecke hinein, je nachdem es sich um eine Ecke handelt, welche mit den Punkten, F, E oder ∞ des reducirten Gebietes (vergl. pg. 213) aequivalent ist. Dementsprechend bleibt ein solcher Punkt bei 4, 6 oder unendlich vielen Operationen der erweiterten Gruppe ungeändert.

Wollen wir die entsprechenden Resultate für quadratische Formen aussprechen, so müssen wir berücksichtigen, dass die Anzahl der Automorphien durch Hinzunahme der Substitution $x = -x'$, $y = -y'$, welche auf unsere Figur keine

Wirkung ausübt, sich verdoppelt. Daraufhin formulieren wir die folgenden Sätze:

1. Eine beliebige binäre definite Form geht durch zwei Automorphien der erweiterten Gruppe in sich über, nämlich durch die identische Substitution und durch die Operation $x = -x'$, $y = -y'$.

2. Wenn der repräsentirende Punkt in einer Elementarsehne unseren Figur liegt so bleibt die Form bei 4 Operationen ungeändert.

3. Wenn der repräsentirende Punkt in eine Dreiecksecke rückt, so wird die Form durch 8 oder durch 12 oder auch durch unendlich viele Operationen der erweiterten Gruppe in sich transformirt.

Wir stellen noch die arithmetischen Kriterien für das Vorhandensein außergewöhnlicher Automorphien zusammen, wobei wir jedoch nur von der Formenclasse sprechen und diese durch ihre reducirte Form repräsentiren. Hinsichtlich des Satzes 2) haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der reducirte Kr.

präsentant der Klasse einer Elementar-sehne erster oder zweiter Art angehört.

Im ersten Falle ist

$$b = 0$$

im zweiten

$$b = a \quad \text{oder} \quad a = c.$$

Der zweite Fall zerlegt sich hiernach noch in zwei Unterarten a) und b). Um dieselben in allgemeingültiger Weise von einander zu sondern, bemerke man, dass jede Elementarsehne zweiter Art zwei Dreiecksecken trägt,

welche dieselbe in ein inneres und zwei äussere Stücke zerlegt. Im Falle a) liegt der reducirte Punkt auf einem äusseren, im Falle b) auf einem inneren Stücke der Elementarsehne zweiter Art. Die Aussagen des Satzes 3) greifen Platz, wenn der repräsentirende Punkt in eine Ecke unserer Dreiecksteilung hineinrückt. Lassen wir die auf der Peripherie gelegenen Ecken ausser Acht, weil wir doch von definiten Formen sprechen

und diese im Innern der Kreise ihre Darstellung finden, so haben wir wieder zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle ist die reducirte Form charakterisirt durch

$$b = 0, \quad a - c \text{ (d. h. den Punkt } F)$$

im zweiten Falle durch

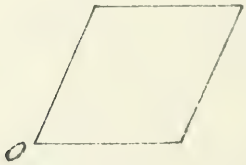
$$a = b = c \text{ (den Punkt } E)$$

Auch die arithmetische Theorie der quadratischen Formen beschäftigt sich mit den soeben aufgezählten Ausnahmeformen. Sie werden dort <u>Anceps-Formen</u> oder auch <u>Ambige Formen</u> genannt. In unserem Sinne bedeutet das Wort Anceps eben dieses, daß der die Anceps-Form repräsentirende Punkt zwei Fundamentalbereichen zugerechnet werden kann.

Da die Anceps-Formen für die spätere Theorie von besonderer Wichtigkeit sind, wollen wir ihre Eigenart noch durch die zugehörigen Gitter charakterisiren, wie bereits kurz vor Weihnachten begonnen wurde.

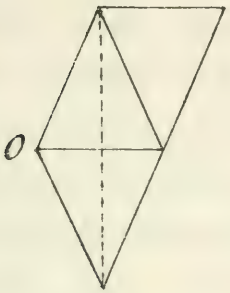
Entsprechend der allgemeinen Construction der Gitter, wonach bei definiten Formen die Seiten der Elementarparallelogramme $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$, der Winkel zwischen diesen $\varphi = \arccos \frac{b}{2\sqrt{ac}}$ betragen sollte, sind die Amorph-Klassen der ersten Art (mit dem Repräsentanten $b = 0$) dadurch charakterisirt, dass sie ein <u>Rechteckiges Punktgitter</u> besitzen. Wir können nämlich ihr Gitter, indem wir eine geeignete Form, eben die reduzirte Form mit $b=0$, also $\varphi = 90°$ der Klasse, herausgreifen, aus einzelnen Rechtecken aufbauen.

Ferner sind die Amorph-Klassen der zweiten Art dadurch ausgezeichnet, dass ihr Punktgitter durch ein System von <u>Rhomben</u> erzeugt werden kann.



Liegt nämlich die erste Unterart mit dem Repräsentanten $a = c$ vor, so liefert die reduzirte Form der Klasse direct ein Parallelgitter mit

rhombischen Elementarparallelogrammen.

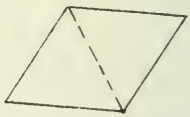


Liegt die zweite Unterart vor ($a = b$), so ist für die reducirte Form $\sqrt{c} \cdot \cos\gamma = \sqrt{\frac{a}{2}}$, so dass die eine Hälfte des Elementarparallelogramms ein gleichschenkliges Dreieck wird. Man stellt dann durch eine Umordnung der Gitterstäbe, wie aus der nebenstehenden Figur ersichtlich ist, aus dem Parallelgitter der reducirten Form wiederum ein rhombisches Gitter her. Diese beiden Unterarten können noch durch den bei O gelegenen Winkel der Rhomben unterschieden werden. Im ersten Falle ($a = c$) besteht nach der Definition unserer a, b, c-Coördinatensysteme für die Coefficienten der reducirten Form die Ungleichung $b < a$. Daher haben wir in dem rhombischen Gitter der reducirten Form $\cos\gamma = \frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$ oder $\gamma > 60°$. Im zweiten Falle ($2a = b$) gilt für die Coefficienten der reducirten Form die Ungleich-

dung $a < c$. Mithin wird in dem Gitter der reducirten Form $\cos \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}} < \frac{1}{2}$ oder $\varphi > 60°$. In dem aus dem reducirten Gitter erzeugten rhombischen wird der Winkel bei o gleich 2φ oder $> 120°$. Der zweite Winkel im Rhombus ergänzt diesen ersten selbstverständlich zu 180°.

Wir können daher sagen: <u>die Winkel der Rhomben unterscheiden sich im ersten Falle von einem Rechten um weniger, im zweiten Falle um mehr als 30°.</u>

Die höheren Ausnahmefälle, denen 8 und 12 Automorphien entsprechen, ordnen sich in die aufgezählten Gitter als Grenzfälle ein. So bildet diejenige Klasse, deren reducirte Form die Coefficienten $a = b = c$ hat, den



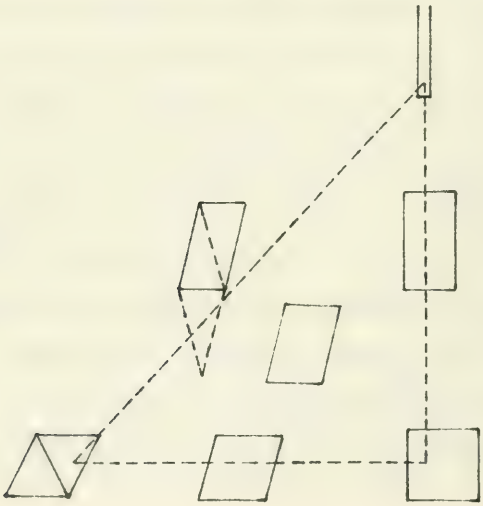
Übergang zwischen unseren beiden Unterarten von rhombischen Gittern. Wir haben daher hier einen Rhombus mit einem Winkel von 60° als Elementarparallelogramm. Das zu dieser Klasse gehörige Gitter bezeichnen wir als <u>gleichseitiges</u>, weil es durch Aneinanderlagerung von

gleichseitigen Dreiecken erzeugt werden kann. Andererseits bildet der Fall $a = c$, $b = 0$ den Uebergang von den rhombischen zu den rechteckigen Gittern. Das Elementarparallelogramm dieser Faller ist daher gleichzeitig ein Rhombus und ein Rechteck, d. h. es ist ein Quadrat. Demnach wird das Gitter dieser Klasse als quadratisches Gitter zu bezeichnen sein.

Wollen wir schließlich auch noch die dritte Ecke unseres Fundamentalbereichs $a = 0$, $b = 0$ berücksichtigen, so haben wir für diese ein ausgeartetes Elementarparallelogramm mit der Seite $\sqrt{a} = 0$ zu verzeichnen. Übrigens müssten wir dasselbe von rechtswegen unendlich lang zeichnen, weil sein Inhalt die endliche Größe $-(b^2 - 4ac)$ betragen soll.

Endlich gehören zu den allgemeinen quadratischen Formen, deren repräsentirende Punkte im Innern des Fundamentalbereiches liegen, Gitter von denen wir auf Grund der

Ungleichungen $0 < b < a < c$ nur aussagen können, dass ihr Winkel $\gamma > 60°$ ist, und dass die Seite Vc jedesmal länger ist als die Seite Va. Tragen wir die den einzelnen Stellen des Fundamentalbereiches zugehörigen Parallelogramme in dem folgenden Schema andeutungsweise ein, erhalten wir eine Uebersicht über den continuirlichen Zusammenhang zwischen der Lage der Punkte a, b, c im Fundamentalbereiche und der Gestalt der zugehörigen Parallelogramme.



Indem wir unsere Betrachtung der defi„
niten Formen beschliessen, betonen wir
nochmals die Schönheit unserer Dreiecksson„
structionen, welche die ganze Theorie der Aequi„
valenz in sich enthalten. Diese Schönheit
ruht natürlich auf dem hohen Grade der
Symmetrie, welche die Figur besitzt, d. h.
auf der grossen Zahl von Transforma„
tionen, welche dieselbe in sich selbst
überführen. Man darf wohl sagen,
dass die moderne Geometrie kei„
ne Figur aufgedeckt hat, welche ei„
nen so weitgehenden Gedankenin„
halt besässe. Über die Zahlentheorie
hinaus beherrscht unsere Figur
die Theorie der elliptischen Modul„
functionen und leitet von hier
aus zu den automorphen Functionen
über, in deren Theorie ähnliche (ver„
allgemeinerte) geometrische Construc„
tionen Platz greifen. Auch auf höhere
Gebiete der Zahlentheorie lässt sich
unser geometrisches Verfahren verall„
gemeinern. Deutet man beispiels„
weise die Coefficienten von quadra„

tischen Formen mehrerer Veränderlicher als homogene Coordinaten in einem Raume von genügend hoher Dimensionenzahl, so wird sich als Ort der definiten Formen ein Gebiet abgrenzen lassen, welches sich entsprechend den unimodularen ganzzahligen Substitutionen der ursprünglichen Veränderlichen gleichfalls in charakteristischer Weise in Parzellen zerlegt. Man kann geradezu sagen, dass ein grosser Teil der Zahlentheorie in dem Studium der Raumeinteilung besteht oder bestehen sollte, welche irgend welchen discontinuierlichen Transformationsgruppen entsprechen. Hierzu bieten die folgenden Erläuterungen über Formen mit $D=0$ und $D>0$ noch wesentliche Gesichtspunkte.

3. Die Formen mit $D=0$ und die Punkte auf dem Kegelschnitt.

Wir gehen nunmehr auf den Rand unseres Kegelschnitts über, indem wir

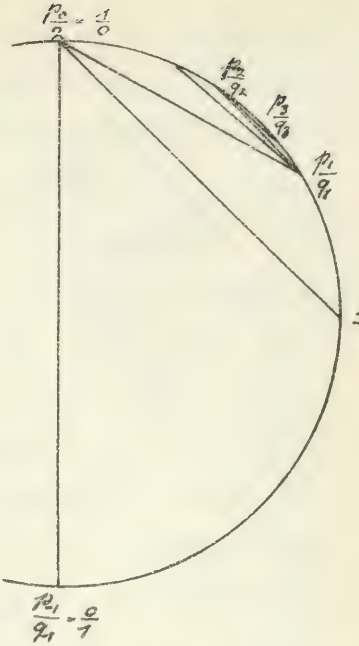
die Betrachtung der zerfallenden quadratischen Formen von der Discriminante $D = 0$ beginnen.

Man stellt sich das Aequivalenzproblem wesentlich einfacher. Was zunächst die rationalen Punkte betrifft, so wissen wir von vorneherein, dass irgend zwei Punkte mit rationalem Parameter w und w' unter sich allemal aequivalent sind. Handelt es sich dagegen um zwei irrationale Punkte, so haben wir nach dem Früheren w und w' in einen Kettenbruch zu entwickeln. Die Punkte sind dann und nur dann aequivalent, wenn die zugehörigen Kettenbrüche von einer gewissen Stelle ab lauter gleiche Teilnenner zu aufweisen.

Das geometrische Gegenbild der Kettenbruchentwickelung auf der Peripherie unseres Kreises ist uns von pg. 202 her bekannt. Dieselbe bedeutet die successive Construction von Elementarsehnen erster Art, welche von den Punkten 0 und ∞ beginnend je zwei

Näherungspunkte der Kettenbruchentwicke-
lung verbinden. Dabei gehen von den
Näherungspunkte $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$ a_r Elementarseh-
nen aus, welche nach den $a_r - 1$ folgen-
den Näherungspunkten und dem $(r+1)^{\text{ten}}$
Hauptnäherungspunkte führen. Wir haben
in dieser Weise die Kettenbruchentwicke-
lung allerdings nur für ein rationales
w gedeutet. Für ein irrationales w liegt die Sache aber gerade so,
mit dem einzigen Unterschiede, daß
wir hierbei den Punkt w niemals mit
einer Sehne wirklich erreichen, sondern
ihm nur mehr und mehr nahe kom-
men. Die so entstehende Figur hat
in der Hauptsache die Gestalt einer
nicht abbrechenden Zickzack-Linie,
welche je die Hauptnäherungspunkte
der Kettenbruchentwickelung ver-
bindet. In den Ecken der Zickzack-
Linie laufen noch je $a_r - 1$ Geraden
fächerförmig zusammen. Messen
wir die Größe der Eckenwinkel et-
wa durch die Anzahl dieser Gera-
den, so können wir die Bedingung

für die Aequivalenz zweier irrationaler Punkte w und w' so formuliren: Es müssen in den zugehörigen Zirkularsystemen von einer gewissen Stelle ab die Ecken gleich gross werden. Die rationalen Punkte bilden zusammen eine Klasse aequivalenter Punkte. Dieselben liegen, wie aus der Construction der rationalen Scala hervorgeht, auf dem Kegelschnitte überall dicht. Dasselbe gilt auch von jeder Klasse irrationaler w. Wir behaupten nämlich: <u>In jedem beliebig klein gegebenen Stücke der Kreisperipherie liegen immer Punkte, welche zu einem gegebenen w aequivalent sind.</u> In der That liegen in dem gegebenen Stücke sicher zwei Punkte, welche Endpunkte einer Elementarsehne sind.



Art sind. Zu dieser Elementarsehne können wir von der Sehne 0∞ ausgehend durch eine Zickzack-Linie hingelangen. Setzen wir von da aus die Linie nach dem durch die Kettenbruchentwickelung von w angezeigten Schema fort, indem wir die Grösse der folgenden Ecken nach den Teilnennern α_r von w bestimmen, so nähern wir uns hierdurch einem Punkte w', welcher mit w aequivalent ist und welcher unserer Construction zufolge innerhalb des vorgegebenen Stückes der Kreisperipherie liegt. Hiermit ist gezeigt, dass auch die Punkte der sämmtlichen irrationalen Klassen von w-Werten auf dem Kegelschnitte überall dicht liegen.

In diesem Gewirr von aequivalenten Punkten kann sich die geometrische Anschauung nicht mehr zurecht finden, nur die arithmetische Behandlung wird hier die Frage der Aequivalenz entscheiden können. Die Dinge liegen also auf dem Rande des fundamentalen Kegelschnittes

gerade umgekehrt, wie im Innern. Während dort die arithmetischen Verhältnisse im geometrischen Bilde sehr übersichtlich wurden, versagt hier die geometrische Anschauung völlig – ein Beispiel dafür, wie sich der geometrische und der arithmetische Standpunkt wechselweise ablösen müssen. Vielleicht kann man sagen: die geometrische Auffassung ergibt überall da aber auch nur da Erleichterungen, wo es sich um arithmetische Ungleichungen handelt.

Wir knüpfen hieran eine Bemerkung, welche für die Auffassung der Gruppeneigenschaft von principieller Bedeutung ist. Wie wir sahen, hat auf dem Rande des Kegelschnittes unsere Gruppe der $(\alpha\beta)$ Substitution nirgends einen Bereich, in dem sie discontinuirlich ist. Beachtet man nur dieses, so möchte man unsere Gruppe für continuirlich halten. Das ist sie aber keineswegs, denn im Innern des Kegel-

schnittes besitzt sie ihre wohl abgegrenzten Fundamentalbereiche. Um diese Verhältnisse kurz bezeichnen zu können, werden wir sagen: Unsere Gruppe ist im Innern des Kegelschnitts eigentlich -, auf dem Rande uneigentlich - discontinuirlich, womit aber nichts über die Gruppe als solche, sondern nur etwas über ihr Verhalten in diesem Gebiete ausgesagt sein soll. Die Gruppe als solche ist discontinuirlich schlechtweg.

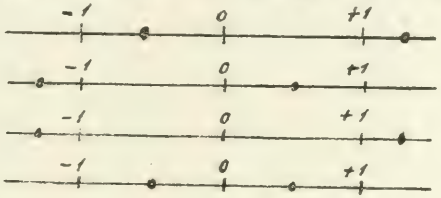
4. Die indefiniten Formen mit $\mathfrak{D} > 0$ und die Punkte ausserhalb des Kegelschnitts.

Es bleiben die indefiniten Formen mit $\mathfrak{D} > 0$ zu behandeln, denen das Aeussere des Kegelschnitts zukommt. Wir fragen auch hier zunächst nach dem reducirten Raume. Die Definition der reducirten Formen (A, B, C) war diese: $A > 0$, $C < 0$. Es genaueren teilten wir die reducirten Formen in folgende

Unterabteilungen ein

Hauptreduc.	I. Art.	$A+B+C<0,\ A-B+C>0$
"	II. Art.	$>0,\ <0$
Nebenreduc.	I. Art.	$<0,\ <0$
"	II. Art.	$>0,\ >0$

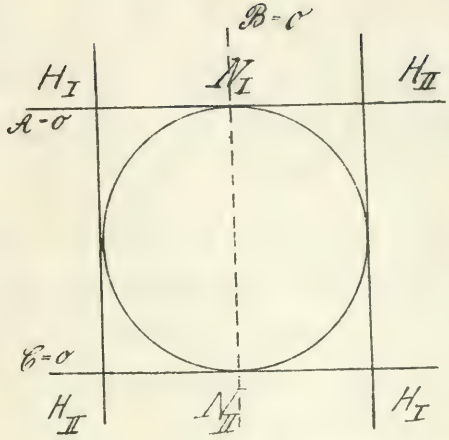
Kurz ein $\Re$ von $A\Re^2+B\Re+C=0$:



Wir bemerken, daß die hiermit gegebene Definition der reduzirten Formen einiger Massen in Widerspruch steht mit unserer geometrischen Darstellung, in welcher nur die Verhältnisse $A-B-C$ zum Ausdruck kommen, während er in den vorstehenden Ungleichungen auf die absoluten Werte der A, B, C ankommt. Wir charakterisiren die reduzirten Formen daher lieber durch die (jetzt natürlich

reellen) Wurzeln, welche sich beim Nullsetzen der Form ergeben, sagen wir durch die Wurzeln Ω_1, Ω_2 der Gleichung $A\Omega^2 + B\Omega + C = 0$. Durch die relative Lage dieser Wurzeln gegenüber den Werten $-1, 0, +1$ sind, wie früher hervorgehoben, unsere Unterabteilungen gleichfalls unterschieden. Diese Lage ist in dem obigen Schema pag. 245 dargestellt. Da Ω_1, Ω_2 die Parameter der Punkte bedeuten, in welchen die Tangenten vom Punkte A, B, C den Kreis berühren, so kann man daraufhin die resp. Gebiete für unsere 4 Arten reducirten Formen bestimmen. Zunächst ist klar, daß reducirte Formen überhaupt oberhalb der oberen und unterhalb der unteren horizontalen Tangente der Kreises gelegen sind. Im Uebrigen beschreibt sich die Verteilung der reducirten Formen am Einfachsten, wenn man das von den horizontalen und vertikalen Tangenten begrenzte vollständige Viereit betrachtet. Dasselbe teilt die Ebene in 4 Dreiecke und 3 Vierecke. Von diesen werden

2 Vierecke durch die Hauptreduc. cirten erster und zweiter Art, zwei Dreiecke durch die Nebenreduc. cirten erster und zweiter Art angenommen, wie in der Figur näher angegeben ist.



Hier fällt zunächst in's Auge, dass das Gebiet der reducirten Formen gewissermaßen einen viel grösseren Teil des Gesamtgebietes der indefiniten Formen einnimmt, als das reducirte Gebiet im Falle der definiten Formen that. Dafür gilt in dem jetzigen reducirten Bereiche nicht mehr der Satz, dass keine zwei Punkte derselben unter sich aequivalent sind, vielmehr gehört zu jeder reducirten Form noch eine unendliche Kette aequi-

valenter reducirter Formen hinzu, eine Kette, welche sich nur im Falle commensurabler A, B, C mit einer endlichen Gliederzahl (der Gliederzahl in der Periode der reducirten Formen) schliesst.

Unsere erste Aufgabe wird nun sein, die zu einem reducirten Punkte unserer Figur (oder auch die zu irgendwelchem Punkte) gehörige Kette durch geometrische Construction zu ermitteln. Dabei stützen wir uns auf einen wichtigen Gedanken, welcher von Hermite zuerst algebraisch ausgesprochen ist (in Crelle Bd. 41, 1851) und der später in's Geometrische übersetzt worden ist (vergl. Modulfunctionen Bd. I. pg. 256, ferner die wiederholt genannte Abhandlung von Hurwitz in Math. Annalen Bd. 45). Hermite geht davon aus, dass die Reduction der definiten Formen bekannt ist, er spaltet nun die Aufgabe für die indefiniten Formen in das Gebiet der definiten Formen hinüber, indem er jeder indefiniten Form defini-

te Formen in geeigneter Weise covariant zuordnet, d. h. in solcher Weise, dass die Beziehung zwischen der gegebenen Form und den zugeordneten durch die Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ nicht gestört wird.

d. 30. I. 96. Um diese covariante Beziehung naturgemäß zu entwickeln, bemerken wir, dass die einzelne quadratische Form $f = (a, b, c)$ als einzige Invariante ihre Discriminante $b^2 - 4ac$ besitzt, welche bei Substitutionen von der Determinante ± 1 völlig ungeändert bleibt. Handelt es sich darum eine invariante Beziehung zwischen 2 quadratischen Formen $f = (a, b, c)$ und $f' = (a', b', c')$, also eine simultane Invariante der beiden Formen aufzustellen, so betrachten wir das Büschel der Formen $f + \lambda f'$.
Bilden wir die Discriminante einer beliebigen Form des Büschels:

$$(b + \lambda b')^2 - 4(a + \lambda a')(c + \lambda c'),$$

so muss dieselbe invarianter Natur

sein, u. zw. bei beliebigen Werten von λ. Es müssen also auch die Coefficienten der nach λ geordneten Discriminante

$$(b^2 - 4ac) + 2\lambda(bb' - 2ac' - 2a'c) + \lambda^2(b'^2 - 4a'c')$$

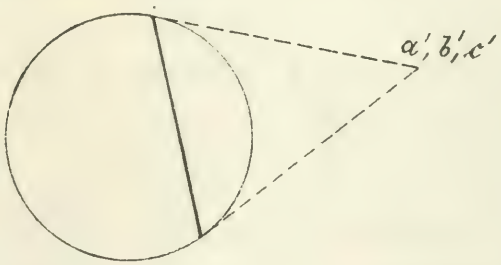
Invarianten werden. Der Coefficient von 1 und λ^2 liefert nichts Neues, der Coefficient von 2λ aber gibt die gesuchte simultane Invariante der Formen f und f', nämlich

$$bb' - 2ac' - 2a'c$$

Es sei nun (a', b', c') die gegebene indefinite Form. Wir ordnen ihr diejenigen definiten Formen (a, b, c) zu, welche mit ihr eine verschwindende simultane Invariante haben. Wir sind dann sicher, daß bei einer Transformation der Form (a', b', c') mittelst einer $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ Substitution, der transformirten indefiniten Form in demselben Sinne diejenigen definiten Formen entsprechen, welche durch jene Transformation aus den Formen

(a, b, c) hervorgehen.

Geometrisch bedeutet diese Zuordnung nichts anderes, als den Uebergang von dem Pole $(a' b' c')$ zu einer Polaren, oder genauer gesagt zu seiner „Polarsehne" indem nämlich von der Polaren nur dasjenige Stück betrachtet wird, welches definite Formen trägt, welches also im Innern des fundamentalen Kegelschnitts enthalten ist. Hiermit zeigt sich denn auch, dass es wirklich definite Formen der gewollten Art giebt. Die obige algebraische Definition hat jedoch vor der geometrischen, den Vorzug voraus, dass sie die Verallgemeinerungsfähigkeit des Ansatzes auf höhere Fälle besser hervortreten lässt.

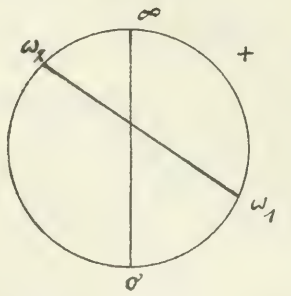


Durch das Hermite'sche Prinzip wird in die Zahlentheorie ein Begriff

eingeführt, der ihr sonst fremd ist, nämlich der Begriff der stetigen Zahlenreihe. Statt der einzelnen Zahlentripels (a', b', c') wird eine stetige Folge von Zahlen (a, b, c), statt der einzelnen Punkte ein geometrischer Ort von Punkten substituirt. In diesem Sinne überschrieb Hermite seine oben genannte Arbeit: Introduction des variables continues dans la théorie des nombres.

Wir haben jetzt unsere früheren Resultate hinsichtlich der Reduction der indefiniten Formen in die Vorstellungen des neuen geometrischen Bildes zu übersetzen. Wir fragen zunächst: Wie liegen die Polarsehnen, welche zu den reducirten Formen gehören? Die Bedingung für die reducirten Formen hiess $A > 0$, $C < 0$. Nun ergibt $Aw^2 + Bw + C$ gleich Null gesetzt die Berührungspunkte w_1, w_2 der Tangenten vom Punkte $A = B = C$ und gleichzeitig die Endpunkte der Polarsehne. Die Punkte w_1, w_2 zerlegen die Kreisperipherie in 2 Teile.

In einem derselben ist Aw^2+Bw+C positiv, in anderen negativ. Wir bemerken, daß durch die Lage der Polarsehne über das Vorzeichen von Aw^2+Bw+C noch nichts ausgesagt wird. Unser geometrisches Bild ist aus diesem Grunde noch unvollständig, und zwar gerade in einer Hinsicht, die für die Reductionstheorie wesentlich ist. Wir können unser geometrisches Bild aber leicht vervollständigen, indem wir dem einen Abschnitte der Kreisperipherie, in welchem $Aw^2+Bw+C>0$ ist, das Zeichen $+$, dem andern das Zeichen $-$ hinzusetzen, wie beistehend geschehen.

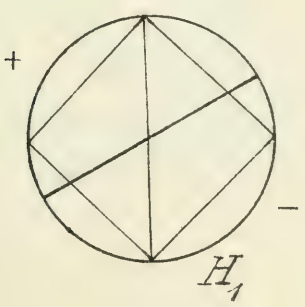


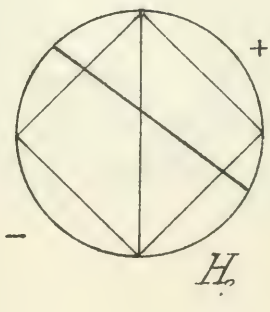
Alsdann zeigt unsere Figur nicht nur die Lage des Punktes $A:B:C$, sondern auch das Vorzeichen von A und C an. Es wird beispielsweise $C<0$ sein, wenn der Punkt $w=0$ in dem negativen Segmente der Kreisperipherie liegt; denn für $w=0$ reducirt sich Aw^2+Bw+C

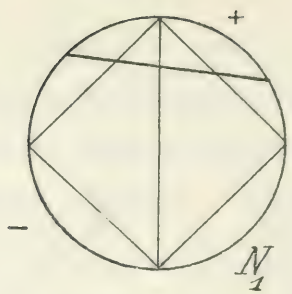
auf C. Es wird ferner $A > 0$ sein, wenn der Punkt $\omega = \infty$ in dem positiven Segmente enthalten ist; denn für $\omega = \infty$ stimmt das Vorzeichen von $A\omega^2 + B\omega + C$ mit dem von A überein. Berücksichtigen wir dieses, so lautet die Bedingung der Reducirtheit als Eigenschaft der Polarsehne ausgesprochen folgendermaßen: Es muß der Punkt ∞ im positiven, der Punkt 0 im negativen Segmente liegen. Daraus folgt, daß die zu einer reducirten Form gehörige Polarsehne jedenfalls die Mittellinie $(0\ \infty)$ unserer Figur schneiden wird.

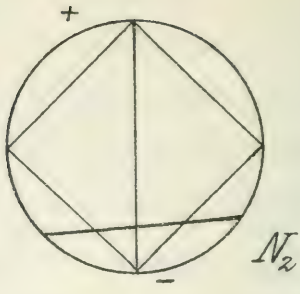
Im Uebrigen unterscheiden wir noch Haupt- und Nebenreducirte und Reducirte erster und zweiter Art. In der Figur kommt dieses darauf hinaus, daß wir die Polarsehnen je nach ihrer Lage gegen gewisse Elementarsehnen charakterisiren. Betrachten wir nämlich die Tabelle von pg. 245, so beruht die Einteilung der Reducirten auf dem Vorzeichen von $A \pm B + C$, also auf dem Vorzeichen des Ausdrucks

$A\omega^2 + B\omega + C$ für $\omega = +1$ und $\omega = -1$. Geometrisch gesprochen kommt es also darauf an, ob die Punkte $+1$ und -1 der Kreisperipherie im negativen oder positiven Segmente liegen. Wir verbinden diese Punkte mit 0 und ∞ und erhalten ein dem Kreise eingeschriebenes Quadrat. Im Anschluss an dieses lässt sich der Unterschied zwischen Haupt- und Nebenreduzirten einfach so aussprechen: Die Polarsehnen von Hauptreduzirten treffen das Quadrat in zwei gegenüberliegenden Seiten, die Polarsehnen von Nebenreduzirten in zwei bei 0 oder ∞ zusammenstossenden Seiten. Die vollständige Unterscheidung ergibt sich aus den folgenden Figuren, deren Richtigkeit ein Vergleich mit der Tabelle von pg. 245 lehrt:



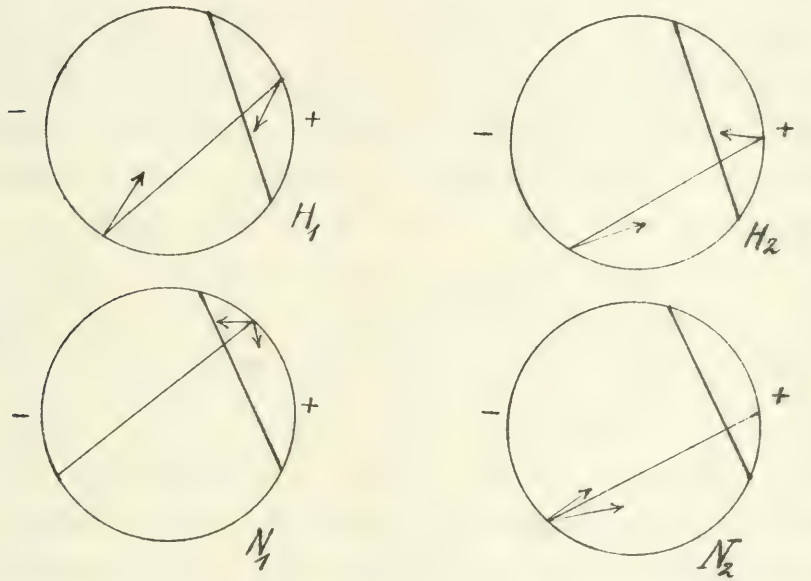






Weiter untersuchen wir die Lage einer (nicht notwendig reducirten) Polarebene gegen die Gesamtheit der Elementarebenen erster Art. Wir greifen zunächst irgend eine Elementarebene heraus, welche von unserer Polaren geschnitten wird. An diese Elementarebene legen sich nach der einen und anderen Seite hin je ein Constructionsdreieck an, dessen beide weitere Seiten wieder von Elementarebenen gebildet werden. Von diesen beiden Seiten der benachbarten Constructionsdreiecke wird je eine durch unsere Polarebene geschnitten. Wir markiren diese Seite im einen und anderen Dreiecke und nennen sie die zu der ersten Elementarebene benach-

barten Sehnen. Jede Elementarsehne hat in diesem Sinne einen rechten und einen linken Nachbar. Nach der Lage dieser Nachbarn gegen die ursprüngliche Elementarsehne unterscheiden wir 4 Fälle, die wir im Folgenden schematisch verzeichnen:



War unsere Polarsehne nicht reducirt, so ist es jetzt leicht, eine Transformation anzugeben, die sie zu einer reducirten macht. Unsere erste Elementarsehne hat zu Endpunkten gewis-

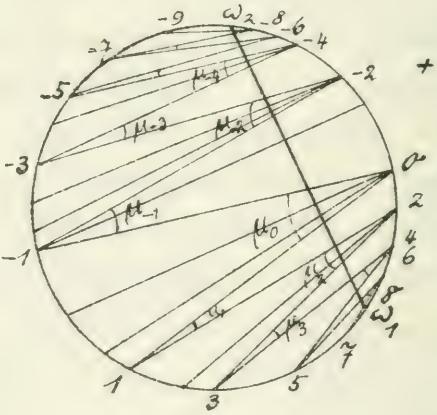
se rationale Punkte der Kreisperipherie, welche $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ heissen mögen, u. zw. sei $\frac{\alpha}{\gamma}$ derjenige Endpunkt, welcher im positiven Segmente befindlich ist. Wir nehmen dabei die Vorzeichen so, dass $(\alpha\delta - \beta\gamma) = +1$ wird. Nun verwandelt die Substitution $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\ \frac{\beta}{\delta}\right)$ diese Elementarsehne in die Mittellinie der Figur u. zw. so dass ihr positives Ende in den Punkt ∞ übergeht. Gleichzeitig verwandelt sie die dritten Ecken der ansitzenden Dreiecke in die Punkte $+1$ und -1. Unsere Transformation bringt also unsere Polarsehne in eine Lage, in welcher sie die Mittellinie schneidet, in welcher sie also eine reducirte Sehne ist. U. zw. entstehen aus unseren 4 letzten Figuren bei der Transformation vier Figuren, welche hinsichtlich der Lage der Polarsehne gegen das Sehnenviereck $\infty, +, 0, +1$ mit den vier vorletzten Figuren identisch sind. Es liefern also unsere vier Figuren bez. eine Hauptreducirte

erster oder zweiter Art etc. wie durch die beigefügten Zeichen H_1, H_2, N_1, N_2 angedeutet ist

In derselben Weise, wie wir soeben zu einer ersten Elementarsehne nach rechts und links einen Nachbar hinzukonstruirt haben, können wir diesen letzteren je einen weiteren Nachbar zugesellen. So fortfahrend bekommen wir eine ganze <u>Kette von Elementarsehnen</u>, durch welche unsere Polarsehne hindurchzieht. Die Kette wird nur dann eine endliche sein, wenn die Polarsehne in rationalen Punkten endigt, im anderen Falle wird sie beiderseits unbegrenzt sein.

Wir unterscheiden in unserer Sehnenkette noch <u>Hauptsehnen</u> und <u>Nebensehnen</u>. Die Hauptsehnen sind durch die Figuren H_1 und H_2, die Nebensehnen durch die Figuren N_1 und N_2 von pg. 257 characterisirt. <u>Die Hauptsehnen bilden für sich eine Zickzacklinie, welche die beiden Endpunkte w_1 und w_2 der Polarseh-</u>

ne asymptotisch einschliessen. Von den einzelnen Ecken dieser Zickzack, linie strahlen eventuell eine Anzahl von Nebensehnen (sagen wir (n-1) Nebensehnen) aus. Die Ecken der Zickzacklinie bezeichnen wir, von einer beliebigen Ecke beginnend, mit (0), (1), (2) . . (-1), (-2) . . . Die zu den bez. Ecken gehörigen Zahlen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{-1}, \ldots$ betrachten wir als ein Maass für die Grösse des Eckenwinkels.



Jede dieser Elementarsehnen gibt uns eine Transformation an die Hand, durch welche wir unsere Polarsehne zu einer reducirten machen können. Der Aufeinanderfolge dieser Elementarsehnen läuft daher eine Aufeinanderfolge von reducirten Formen parallel. Wir behaupten nun:

Diese Aufeinanderfolge reducirter Formen ist mit der früher betrachteten Kette reducirter Formen direct identisch. Wir erhalten also die frühere Kette, indem wir der Reihe nach alle Sehnen unserer Sehnenkette derart in die Mittellinie transformiren, daß immer das positive Sehnenende nach $\omega = \infty$ fällt.

Frei. d. 31. I. 96. Der Beweis dieses Satzes läßt sich direct von unserer Figur aus führen. (Vergl. hierzu Hurwitz in der mehrfach genannten Arbeit, Math. Annal. Bd. 45). Wir ziehen es aber vor, auf unsere frühere Gitterfigur zu recurriren, um so den Zusammenhang zwischen dem jetzigen und dem damaligen geometrischen Bilde herzustellen.

Die reducirten Formen, welche wir nach unserer jetzigen Methode erhalten, sind den Elementarsehnen der Zickzackli nie eindeutig zugeordnet. Jede Elementarsehne können wir dabei ersetzen durch ihre Endpunkte, d. h. durch ein Paar rationaler Punkte,

wobei der eine Punkt des Paares auf dem positiven, der andere auf dem negativen Segmente der Kreisperipherie gelegen ist.

Wir erinnern uns nun an die beiden „natürlichen Umriss-polygone" der früheren Gitterfigur, dessen eines ein positiven Quadraten, der andere ein benliegenden negativen Quadraten lag. Die Ecken der ersten Polygone wurden mit den geraden, die Ecken des anderen mit den ungeraden Indices bezeichnet, und nun wurden die reducirten Formen dadurch gewonnen, dass man jedesmal eine Ecke der einen Polygone mit der darauf folgenden Ecke der anderen Polygone zusammennahm. Können wir nun zeigen, dass jene Punkte der Kreisperipherie und diese Eckpunkte der natürlichen Umrisspolygone gegenseitig eindeutig zusammengehören, so wird dadurch gleichzeitig bewiesen, dass auch die reducirten Formen, welche wir durch die eine oder

andere Methode erhalten können, die selben sind.

Zunächst führen wir für die rationalen Parameterwerte der Zickzack-Ecken eine passende Bezeichnung ein. Es heisse der zur Ecke (r) gehörige Parameter $\frac{p_r}{q_r}$ (wobei wir die p_r, q_r als teilerfremde ganze Zahlen voraussetzen). Alsdann haben wir etwa auf dem positiven Kreissegmente die Eckpunkte

$$\ldots \frac{p_{-2}}{q_{-2}}, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$$

mit den zugehörigen Winkelgrößen

$$\mu_{-2}, \mu_0, \mu_2, \ldots$$

Ebenso liegen auf dem negativen Kreissegmente die Punkte

$$\ldots \frac{p_{-1}}{q_{-1}}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots$$

mit den zugehörigen Winkeln

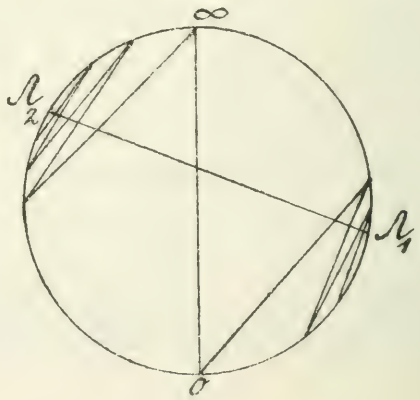
$$= \ldots \mu_{-1}, \mu_1, \mu_3, \ldots$$

Zwischen diese Zahlen ordnen sich noch die zu den freien Enden der Nebenachsen gehörigen

Parameterwerte ein.
Andrerseits bezeichnen wir die Coordinaten x und y der Ecken unserer zur Form $f(xy)$ gehörigen natürlichen Umrissspolygone mit (p_r, q_r). Wir behaupten nun, daß die Zahlen p_r und q_r in beiden Fällen dieselben sind. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich aus dem Zusammenhang unserer beiderlei Figuren mit gewissen Kettenbruchentwickelungen.

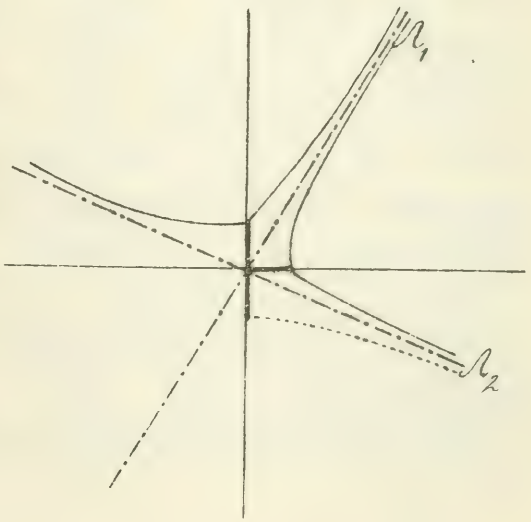
Was zunächst die Kreisfigur betrifft, so transformiren wir in dieser die Sehne mit den Endpunkten $\frac{p-1}{q-1}$ und $\frac{p}{q}$ auf die bekannte Art und Weise in die Mittellinie der Figur, wobei die Polarsehne in die Polare einer reducirten Form F verwandelt wird.

Die transformirte Zickzacklinie von, dem wir in zwei Hälften, welche beide von der Mittellinie ausgehend nach rechts und



links hin auf die Wurzeln Ω_1, Ω_2 von $F=$ zustreben. Von solchen Teilzickzacklinien lernten wir auf pg. 241, daß sie genau die Kettenbruchentwickelungen derjenigen Kreispunkte wiedergeben, auf welche sie zustreben, wobei ihre Ecken die Näherungsbrüche, ihre Winkel die Teilnenner des Kettenbruches liefern. Daraus folgt, daß die Zahlen $\frac{p_r}{q_r}$ bei positivem Index die Näherungsbrüche von Ω_1, bei negativem die von Ω_2 darstellen.

Andrerseits betrachten wir die natürlichen Umrißpolygone in der Gitterfigur. Führen wir ein rechtwinkliges x, y-Koordinatensystem ein, so zerschneiden seine Axen die natürlichen Umrißpolygone gleichfalls in zwei Hälften, welche sich bez. den Nullstrahlen $\frac{x}{y} = \Omega_1$



oder $\frac{x}{y} = R_2$ der zu dem benutzten Coordi-
natensystem gehörigen reducirten Form
Faustschmiegen. Die auf solche Weise ent-
stehenden Teilpolygonzüge stellen aber ihrer-
seits nach Früherem die Kettenbruch-
entwickelung von R_1 bez. von R_2
dar, wobei jetzt die Polygonecken
die Coordinaten $x = p_r$, $y = q_r$ erhal-
ten. Wir dürfen dabei ersichtlich an-
nehmen, dass die Wurzeln R_1, R_2, die
wir jetzt betrachten, dieselben sind,
wie vorher bei der Kettenbruchentwick-
lung auf der Kreisperipherie. Da nämlich
unsere Umrisspolygone sämmtliche redu-
cirten Formen liefern, so muss
es möglich sein, das Coordinaten-
system so zu legen, dass gerade die
vorher benutzte reducirte Form τ
sich ergibt. Mithin haben die Eck-
punkte der Umrisspolygone dieselben
Grössen p_r, q_r zu Gittercoordinaten,
welche vorher in den Parame-
terwerten der Zickzackecken
auftraten.

Nach den Bemerkungen zu Be-

ginn dieser Beweises folgt dann weiter, dass in der That unsere beiden Figuren hinsichtlich der Reduction der indefiniten Formen dasselbe leisten. Der innere geometrische Zusammenhang dieser beiden so verschiedenen Figuren ist jedenfalls ein sehr merkwürdiger.

Wir bemerken noch, dass die freien Ecken der $(n-1)$ Nebenrechnen, welche von einem Endpunkte unserer Fixkreislinie auslaufen, ihrerseits die Parameterwerte $\omega = \frac{p}{q}$ aufweisen, welche den Coordinaten p, q der $n-1$ Nebenpunkte entsprechen, welche die correspondirende Seite des einen Umrisspolygons im Fixkreis trägt.

Es wird nun darauf ankommen, aus der neuen Figur neue zahlentheoretische Resultate abzuleiten.

Wir nehmen zunächst die Frage nach den <u>Automorphien</u> einer Form f noch einmal auf. Wir wollen jetzt vier Arten von Automorphien unterscheiden, welche durch

das folgende Schema charakterisirt sind:

1. $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, $\omega_1 \sim \omega_1$, $\omega_2 \sim \omega_2$
2. $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, $\omega_1 \sim \omega_2$, $\omega_2 \sim \omega_1$
3. $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, $\omega_1 \sim \omega_2$, $\omega_2 \sim \omega_1$
4. $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, $\omega_1 \sim \omega_1$, $\omega_2 \sim \omega_2$

Im Falle 2. und 3. werden hiernach die Wurzelpunkte von $f = 0$ auf dem Kreise vertauscht, im Falle 1. und 4. bleiben sie fest. Im Falle 1. und 2. handelt es sich um eine Substitution welche den positiven Sinn, in welchem wir uns die Kegelschnittperipherie durchlaufen denken mögen, ungeändert läßt, im Falle 3. und 4. um eine Substitution, welche diesen Sinn umkehrt.

Der Fall 1 ist früher ausführlich untersucht worden. Der Determinante +1 und dem Festbleiben der Wurzelpunkte entsprechend wird dabei das positive Segment unseres Kegelschnitts in das positive, das negative in das negative übergeführt. Dieser Fall führt auf die

gewöhnliche Theorie der Pell'schen Gleichung $t^2 - Du^2 = 4$.

Im Falle 2. wird die Kreisperipherie in sich verschoben, so dass w_1 nach w_2 und w_2 nach w_1 gelangt. Da (wegen der Substitutionsdeterminante $+1$) die Reihenfolge der einzelnen Teile der Kreisperipherie nicht geändert wird, so gelangt hierbei das positive Segment an den Platz des negativen und das negative an den des positiven; es geht f in $-f$ über. Der zweite Fall tritt hiernach dann ein, wenn eine Form ihrer entgegengesetzten eigentlich aequivalent ist. Die Form heisst dann sich selbst „invers", vergl. pg. 161.

Der Fall 3. bedeutet eine Spiegelung an einer Elementarsehne welche das positive und negative Segment je in 2 Abschnitte zerlegt. Bei der Spiegelung werden diese Abschnitte des positiven Segments (und ebenso die des negativen) unter sich ausgetauscht, so dass $+f$ in $+f$ übergeht. Im diesem

Falle gehört f zu einer Anzeps-Klasse.
Der Fall 4. gibt zu der „außergewöhnlichen Pell'schen Gleichung" $t^2 - Du^2 = -4$
Anlass. Das positive und negative Segment des Kreises werden im Falle 4. gegenseitig vertauscht; f geht daher in $-f$ über.

Bei kommensurabeln a, b, c sind die Automorphien 1, wie wir wissen, immer u. zw. in unendlicher Zahl vorhanden. Zugleich ist klar, dass diese Automorphien nur bei kommensurabeln a, b, c eintreten; denn $f = 0$ soll mit den Fixpunkten von $(\alpha\beta)$ übereinstimmen. Von den 3 anderen Arten braucht im Allgemeinen keine aufzutreten. Diese letzteren bedingen sich dabei gegenseitig in dem Sinne, dass das Eintreten von zweien derselben auch Automorphien des dritten Falles nach sich zieht. Wenn beispielsweise Automorphien der Falles 2. und 3. vorhanden sind, so erhält man durch Zusammensetzung von zwei solchen Automorphien eine Automor-

phie von der Determinante -1, welche w_1 in w_1 und w_2 in w_2 überführt, d. h. eine Automorphie der Faller 4. Aus dieser Bemerkung fliessen Sätze der folgenden Art: Wenn es in einer Anzahl-Klasse eine Form gibt, welche mit ihrer entgegengesetzten eigentlich aequivalent ist, so besitzt die ausgezeichnete Pell'sche Gleichung Lösungen etc. Fall 4. ist wieder durchaus daran gebunden, dass die Coefficienten a, b, c der vorgelegten Form commensurabel sind.

90. d. 6. II. 96. Wir fragen nun nach der geometrischen Bedeutung dieser 4 Arten von Automorphien. Zum vollen Verständnisse dessen müssen wir uns eine Begriffsbildung aneignen, welche von Cayley herrührt, <u>die Cayley'sche Maassbestimmung</u>. Dieselbe hängt aufs Innigste mit unserer Dreiecksfigur und allen jenen höheren Figuren zusammen, welche sich beim Studium von Gruppen linearer Substitutionen in der Theorie der automorphen

Funktionen darbieten. Leider können wir hierauf nicht mehr so ausführlich eingehen, als es der Wichtigkeit der Sache angemessen wäre.

Wir haben schon im ersten Teile dieser Vorlesung bei den Gitterbetrachtungen eine Pseudometrik eingeführt. Damals genügte es uns, statt der imaginären Kreispunkte zwei andere (reelle oder imaginäre) Punkte der unendlich fernen Geraden zu substituiren und diese einer Maassbestimmung zu Grunde zu legen. Jetzt gehen wir mit Cayley einen Schritt weiter. Wir fassen nämlich die beiden Kreispunkte zusammen, mit der doppelt zählenden Verbindungslinie, d. i. der unendlich weiten Geraden, als einen ausgearteten Kegelschnitt auf und ersetzen ihn durch einen nichtausgearteten. Zu unserem Falle wählen wir als solchen unseren fundamentalen Kegelschnitt $S=0$. Die Cayley'sche Maassbestimmung steht nun zu diesem Kegelschnitt in einer ganz ähnlichen Beziehung,

wie die gewöhnliche Maafsbestimmung zu dem Paar der imaginären Kreispunkte. Um zunächst den Winkel zweier Geraden zu definiren, ziehen wir von ihrem Schnittpunkte aus die Tangenten an den fundamentalen Kegelschnitt und berechnen das Doppelverhältniss (D) jener Geraden mit diesen Tangenten. Alsdann bezeichnen wir als Winkel (w) jener beiden Geraden die Gröfsse

$$W = \frac{i}{2} \lg D$$

Dualistisch genau entsprechend definiren wir die Entfernung zweier Punkte, indem wir zu den gegebenen Punkten die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinien mit dem fundamentalen Kegelschnitt hinzunehmen und das Doppelverhältniss (D) dieser 4 Punkte bilden. Alsdann bezeichnen wir als Entfernung (E) der gegebenen Punkte

$$E = \frac{i}{2} \lg D.$$

Dieses die einfachen Grundzüge jener Theorie. Ich mufs es Ihnen überlassen, sich in dieselbe soweit einzuleben,

dass Sie sich womöglich in einer mit Cayley'scher Maassbestimmung ausgestatteten Ebene gleich leicht, wie in der gewöhnlichen zurecht finden.

Hier interessiren uns vornehmlich die Substitutionen (2,3), welche uns gewisse Collineationen der Ebene lieferten. Da dieselben unseren fundamentalen Kegelschnitt in sich überführen, so lassen sie auch die Maassverhältnisse der Figuren völlig ungeändert. Zwei Geraden bilden also nach der Collineation denselben Winkel, wie vor derselben. Zwei Punkte haben vor und nach der Collineation dieselbe Entfernung. Wir unterscheiden dabei zwischen den Substitutionen von der Determinante +1 und denen von der Determinante -1. Bei den ersteren bleibt auch der Sinn, in dem die Punkte des Kegelschnitts auf einander folgen, ungeändert, bei den letzteren wird er umgekehrt. Irgend eine Figur der Ebene geht daher bei den Substitutionen

$\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ in eine direct congruente, bei den Substitutionen $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ in eine invers congruente über. Wir bezeichnen die ersteren als <u>Bewegungen</u> die letzteren als <u>Umlegungen der Ebene</u>.

Wir würden die Gesammtheit dieser Bewegungen und Umlegungen erhalten, wenn wir die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als continuirliche Parameter ansehen wollten; nun sie aber nur ganzzahlige Werte annehmen können, haben wir eine in dieser Gesammtheit enthaltene discontinuirliche Untergruppe vor uns.

Bei allen Bewegungen und Umlegungen dieser Untergruppe geht unsere Figur in sich über und zwar geht bei der Gesammtheit unserer Bewegungen jedes schraffirte Dreieck in jedes schraffirte, bei der Gesammtheit der Umlegungen jedes schraffirte in jedes nicht-schraffirte Dreieck über. <u>Jedes schraffirte Dreieck ist also im Sinne der Cayley'schen Maassgeometrie mit</u>

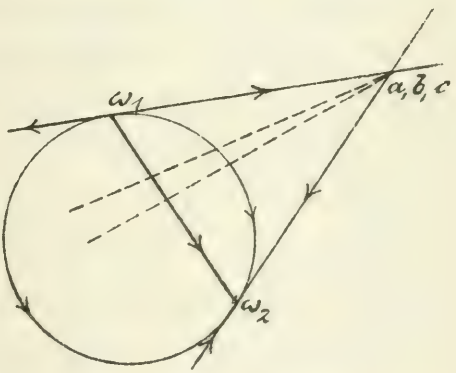
jedem schraffirten direct, mit jedem nicht-schraffirten invers congruent.

Durch diese Formulirung wird die Symmetrie unserer Figur viel schärfer gekennzeichnet, als es ohne dieselbe möglich war. Unsere Figur ist in der Cayley'schen Maassbestimmung eine reguläre Gebietseinteilung, ebenso gut wie es etwa ein Schachbrett in der gewöhnlichen Maassbestimmung ist. Insbesondere haben alle Dreiecke unserer Figur die gleichen Winkel, nämlich 60°, 90° und da, wo sie an die Peripherie der Kegelschnitte heranragen 0°.

Wir kommen nun speziell auf die geometrische Bedeutung der Automorphien zurück, wobei wir die pg. 268 unterschiedenen Fälle einzeln betrachten. Die Automorphien des Falles 1. und 2. sind Bewegungen, bei denen ein vorgegebener Punkt (a, b, c) festbleibt. Die Automorphien des Falles 1. und 2. werden wir daher als Drehungen, den Punkt a, b, c im Falle 1. als Dre-

kungszentrum anzusprechen haben.

Im Falle 1. bleiben auch die Berührungspunkte der von a, b, c an den fundamentalen Kegelschnitt gezogenen Tangenten für sich fest. Da wir somit die sämmtlichen 3 Fixpunkte der betr. Collineation (nämlich diese beiden Berührungspunkte und den Punkt a, b, c selbst) kennen, so können wir uns in der nebenstehenden Zeichnung ein Bild von der durch sie bewirkten Umformung machen. Nach den Elementen der projectiven Geometrie bildet jede Gerade durch den Punkt a, b, c mit den beiden festen Tangenten und der durch die Collineation aus ihr hervorgehenden Geraden ein Doppelverhältniss, welches unabhängig von der Aus-



mahl der Geraden ist. Im Sinne der Cayley'schen Maassbestimmung können wir dies so ausdrücken: *Jede Gerade durch a, b, c wird vermöge der Collineation um einen constanten Winkel gedreht.*

Die Grösse dieses Winkels hängt auf's Einfachste mit dem Sell'schen Winkel zusammen. Führen wir für den Augenblick solche Dreiecks-Coordinaten x_1, x_2, x_3 ein, dass die Gleichungen der beiden Tangenten lauten $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$, die Gleichung ihrer Berührungssehne $x_2 = 0$, so können wir unsere Collineation in der Form anschreiben:

$$\varrho x_1' = \lambda x_1, \quad \varrho x_2' = x_2, \quad \varrho x_3' = \mu x_3.$$

Nun wird aber die Gleichung der fundamentalen Kegelschnitte folgende Gestalt haben $x_2^2 - K x_1 x_3 = 0$, wo K irgend einen Wert hat, den man durch Annahme der Einheitspunkte noch beliebig fixiren kann. Da unsere Collineation diesen Kegelschnitt in sich transformiren soll, so folgt, dass $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Betrachten wir eine beliebi-

ge Gerade $x_1' + \nu x_3' = 0$ durch den Punkt a, b, c; dieselbe geht bei unserer Collineation über in $\frac{x_1'}{\lambda} + \nu\lambda x_3' = 0$. Das Doppelverhältnis der 4 Geraden

$$x_1' + \nu x_3' = 0,\quad x_1' + \nu\lambda^2 x_3' = 0,\quad x_1' = 0,\quad x_3' = 0$$

wird nun ersichtlich gleich λ^2, der Cayley'sche Drehungswinkel also gleich $i\,lg\,\lambda$.

Wollen wir diesen Winkel in den Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausdrücken, so bemerken wir, daß λ^2 derjenige Factor ist, mit welchem sich der Quotient aus den linken Seiten der Tangentengleichungen $x_1' = 0$, $x_3' = 0$ bei der Transformation multiplicirt. Wir haben nämlich $\frac{x_1'}{x_3'} = \lambda^2 \frac{x_1}{x_3}$. In den früheren Coordinaten lauten die Gleichungen der Tangenten $x_1' = 0$ und $x_3' = 0$ nach pg. 182 folgendermaßen:

$A w_1^2 + B w_1 + C = 0$ und $A w_2^2 + B w_2 + C = 0$,

(wo wir die laufenden Coordinaten zur Unterscheidung von den Coordinaten a, b, c des festen Poles durch große Buchstaben bezeichnet haben). Wir wollen hier noch die

Wurzeln $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ der Gleichung:

$$A\mathfrak{R}^2 + B\mathfrak{R} + C = 0$$

einführen. Dann werden die Gleichungen unserer Tangenten

$(\mathfrak{R}_1 - \omega_1)(\mathfrak{R}_2 - \omega_1) = 0$ bez. $(\mathfrak{R}_1 - \omega_2)(\mathfrak{R}_2 - \omega_2) = 0$;

der Ausdruck, dessen Verhalten wir bei der Pell'schen Substitution untersuchen wollen, ist daher:

$$\frac{(\mathfrak{R}_1 - \omega_1)(\mathfrak{R}_2 - \omega_1)}{(\mathfrak{R}_1 - \omega_2)(\mathfrak{R}_2 - \omega_2)}$$

Aber die Pell'sche Substitution schreibt sich in dem Parameter $\mathfrak{R}$ nach pag. 144 folgendermaßen:

$$\frac{\mathfrak{R} - \omega_1}{\mathfrak{R} - \omega_2} = \left(\frac{t + u\sqrt{D}}{2}\right)^2 \frac{\mathfrak{R}' - \omega_1}{\mathfrak{R}' - \omega_2}$$

Indem wir diese Formel gleichzeitig auf $\mathfrak{R}_1$ wie auf $\mathfrak{R}_2$ anwenden, erhalten wir:

$$\frac{(\mathfrak{R}_1 - \omega_1)(\mathfrak{R}_2 - \omega_1)}{(\mathfrak{R}_1 - \omega_2)(\mathfrak{R}_2 - \omega_2)} = \left(\frac{t + u\sqrt{D}}{2}\right)^4 \cdot \frac{(\mathfrak{R}_1' - \omega_1)(\mathfrak{R}_2' - \omega_1)}{(\mathfrak{R}_1' - \omega_2)(\mathfrak{R}' - \omega_2)}.$$

Der Factor, mit dem sich bei der Pell'schen Substitution der Quotient unserer Tangentengleichungen multiplizirt, ist daher

$$\lambda^2 = \left(\frac{t + u\sqrt{5}}{2}\right)^4$$

Mithin wird

$$i l g \lambda = 2\, i l g \frac{t + u\sqrt{5}}{2};$$

dieses ist aber das Doppelte derjenigen Größe, welche pg. 145 als Pell'scher Winkel definirt wurde. Der Cayley'sche Winkel ist also einfach gleich dem Doppelten der Pell'schen Winkels.

Die Hauptpunkte der Pell'schen Theorie aber drücken sich in der Sprache der Cayley'schen Maaßbestimmung folgendermaßen aus: Es gibt in unserer Gruppe zu jedem rationalen Centrum a, b, c unendlich viele Drehungen, dieselben setzen sich aus einer kleinsten durch fortgesetzte Wiederholung zusammen, die zugehörigen Drehungswinkel werden berechnet, indem man die sämtlichen Wurzeln der Pell'schen Gleichung benutzt.

Zum Vergleich ziehen wir noch die Automorphien der definiten Formen her. an. Wir haben zwei Arten derselben zu unterscheiden, solche von der Periode 2. und solche von der Periode 3. Die ersten gehörten zu Formen, welche in den Mittelpunkten der Dreiecks-kanten, die letzteren zu Formen, welche in den Mittelpunkten der Dreiecksflächen ihre repräsentirenden Punkte hatten.

Auch diese Automorphien sind im Sinne unserer Maafsbestimmung Drehungen. Der Drehungswinkel beträgt bei Ziehungsweise 180° und 120°

Wir können die Drehungsmittelpunkte der ersten Art als M_2, die der zweiten als M_3 bezeichnen. Diese Punkte liegen discontinuirlich im Innern des Kegelschnittes zerstreut. In demselben Sinne werden wir alle rationalen Punkte ausserhalb der Kegelschnittes (und ebenso die rationalen Punkte auf dem Rande desselben) als M_∞ bezeichnen können, weil sie Centren für Cayley'sche Drehungen

von unendlich hoher Periode, d. h. für aperiodische Drehungen sind. Diese ben erfüllen das Äußere (und den Rand) des Kegelschnittes überall dicht.

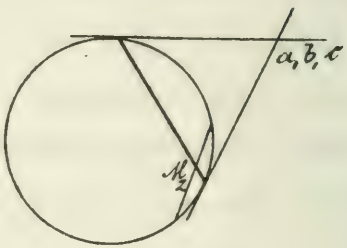
Der Fall 2. der Automorphisen trat ein bei einer mit sich selbst „inver, sen" Formenklasse. Dabei wurden die Wurzeln w_1 und w_2, d. h. die En„ den der zum Punkte a, b, c gehörigen Polarsehne gegen einander ver, tauscht. Da diese Vertauschung durch eine Bewegung der Ebene geschieht, so muß auf der Sehne ein Punkt liegen, in welchem eine Collineation unserer Gruppe u. zw. eine Colline, ation von der Periode 2 ihren Fix„ punkt hat. <u>Die Sehne muß daher durch einen der Punkte M_2 hindurch, gehen.</u>

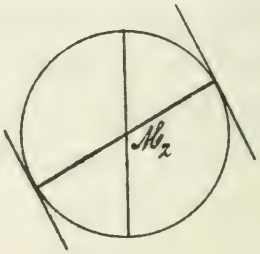
Um auch ein arithmetisches Kri„ terium für diesen Fall der Automorphien hinzuzufügen, be„ merken wir, daß durch den Punkt M_2 der Polaren notwendig eine Elementarsehne erster Art der

Dreiecksfigur hindurchgeht. Diese Elementarsehne können wir durch eine Collineation unserer Gruppe in die Mittellinie der Figur transformiren, wobei der Punkt M_2 in den Punkt M_2 der Mittellinie also in den Punkt mit den Coordinaten $b=0$, $a=c$ übergeht. Gleichzeitig wird dabei unsere Form (a, b, c) in eine reducirte Form (A, B, C) verwandelt, (weil ihre Polare nach der Transformation die Mittellinie im zugehörigen Punkte M_2 schneidet). Die Gleichung der Polaren des reducirten Punktes

$$Bb - 2Ac - 2Ca = 0$$

muß hiernach erfüllt sein, wenn wir für a, b, c speciell die Coordinaten dieses





Punktes M_2 eintragen. Es muß also sein

$$A + C = 0.$$

Dieses die gesuchte arithmetische Bedingung für das Eintreten des 2ten Falles der Automorphien. Man erkennt unmittelbar, daß diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

Mithin haben wir den Satz:
Soll eine Form mit sich selbst invers (d. h. mit ihrer inversen eigentlich aequivalent) sein, so muß in der Kette der reducirten Formen eine solche Form vorhanden sein, deren erster und letzter Coefficient entgegengesetzt gleich sind.

Wir kommen zu den Fällen 3. und 4. Hier handelt es sich um Substitutionen von der Determinante -1. Wir bezeichneten unter ihnen diejenigen Operationen, bei denen eine Seite unserer Dreiecksfigur ungeändert bleibt, als Spiegelungen

in einem übertragenen Sinne, während nun die Spiegelungen an den Durchmessern unserer Figur im Sinne der elementaren Maafsbestimmung wirkliche Spiegelungen waren. Vom Standpunkte der Cayley'schen Maafsbestimmung sind alle diese Operationen wirkliche Spiegelungen, d. h. Umformungen, bei denen jede gegebene Figur in eine inverso congruente umgewandelt wird. Wir mögen noch die Elementarrechnen erster und zweiter Art bez. die an ihnen stattfindenden Spiegelungen als S' und S'' unterscheiden.

Im Falle 3. der Automorphien handelt es sich um eine Spiegelung, welche die Endpunkte w_1, w_2 der Polarrechne von (a, b, c) vertauscht, wobei die Polarrechne in sich transformirt wird. Sie muß alsdann durch das Centrum der Spiegelung hindurchgehen. Gleichzeitig geht dann die Axe der Spiegelung, welche Polare der Centrums ist, durch den Pol

unserer Sehne, d. h. durch den Punkt (a, b, c) hindurch. Die Axe der Spiegelung kann aber, da es sich um eine Operation unserer Gruppe handelt, nur eine Elementarsehne erster oder zweiter Art sein. Der Punkt (a, b, c) muss daher auf einer der Geraden S' oder S'' liegen.

Um hieraus wieder ein arithmetisches Kriterium für das Eintreten der Fälle 3) abzuleiten, bemerken wir, dass wir jede S' in die Mittellinie b = 0, jede S'' in die Seite a = b des reducirten Dreiecks durch eine unserer Collineationen verwandeln können. Die Form (a, b, c) geht dabei in eine notwendig reducirte Form über, für welche im einen oder anderen Falle entweder B = 0 oder A = C ist. In beiden Fällen sprechen wir von einer Ancepsform. Die Automorphien der Fälle 3) treten also bei den Ancepsklassen auf, d. h. dann, wenn sich in der Kette der reducirten Formen entweder eine Form befindet mit

$A = C$ oder eine solche mit $B = 0$.

Im Falle 4) endlich handelt es sich um eine Umlegung der Ebene, bei der die Wurzeln ω_1, ω_2 in der Gleichung $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ ungeändert bleiben. Hieraus werden wir gerade so, wie auf pag. 141, Bedingungen für die Coefficienten $(\alpha\beta)$ der Substitution ableiten können. Dieselben drücken sich ebenso wie dort mit Hülfe zweier ganzer Zahlen t und u aus, zwischen denen jetzt, da die Determinante der Substitution gleich -1 ist, die Gleichung besteht $t^2 - Du^2 = -4$. Diese Gleichung heisst die <u>aufgewöhnliche Pell'sche Gleichung</u>. Um das Vorhandensein von Automorphien der Falle 4) zu entscheiden, sind wir auf die Untersuchung dieser Gleichung angewiesen, über deren Lösungen im allgemeinen nichts ausgesagt werden kann. Wir müssen uns darauf beschränken, Tabellen zu citiren, in denen immer die kleinste Lösung dieser Gleichung ange-

geben wird (falls Lösungen überhaupt vorhanden sind) nämlich:
Legendre: Théorie des nombres Bd I. Tab. X (der deutschen Ausgabe).
Cayley: Gesammelte Werke Bd IV pg. 40.

Nennen wir die betr. kleinste Lösung t_0', u_0' und bilden uns die complexe Zahl $\frac{t_0' + u_0' \sqrt{D}}{2}$, so erhält man aus ihr die sämmtlichen Lösungen der beiden Pell'schen Gleichungen $t^2 - Du^2 = \pm 4$, indem man $\frac{t + u\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_0' + u_0' \sqrt{D}}{2}\right)^V$ setzt und V alle ganzen, positiven und negativen Zahlen durchlaufen läßt. Die geraden V ergeben dabei die Lösungen $t^2 - Du^2 = +4$, die ungeraden V diejenigen von $t^2 - Du^2 = -4$.

rei. d. 7. II. Nachdem wir unsere Dreiecksfigur für die Reduction der einzelnen indefiniten Formen verwertet haben, bleibt jetzt noch die abschliessende Frage zu besprechen nach der Gesammtheit der reducirten Formen einer Klasse. Von

Seiten der Zahlentheorie wissen wir darüber, dass die reducirten Formen eine Kette von unendlicher Gliederzahl bilden, die aperiodisch ist, falls nicht gerade die a, b, c commensurable Zahlen sind. In geometrischer Hinsicht möchte man nun erfahren: Wie verteilen sich die repräsentirenden Punkte auf das reducirte Gebiet? Nach einem bekannten Grundsatze von Weierstrass müssen unendlich viele Punkte mindestens eine Häufungsstelle haben. Man wird also vor Allem fragen: wo liegen die Häufungsstellen etc.? Diese interessanten Fragen sind bisher gänzlich unerledigt. Nur eine negative Aussage lässt sich ohne Weiteres hierüber geben: Es ist nicht möglich das Äussere des Kegelschnittes so in Fundamentalbereiche zu zerlegen, dass keine zwei Punkte des einzelnen Bereiches aequivalent sind. Dass dieses im Innern des Kegelschnittes möglich war, lag daran, dass die Fixpunk

te M_2 u. M_3 der Collineationen im Innern der Kegelschnitte einen endlichen Abstand von einander haben. In Folge dessen legen sich hier die Fundamentalbereiche, indem jeder an einen Punkt M_2 und einen Punkt M_3 heranreicht, als Gebiete endlicher Ausdehnung an einander. Der Winkel, mit dem sich der Bereich an seinen Punkt M_2 bezw. M_3 heranzieht, ist der zugehörige Poll'sche Winkel, d. h. 180°, bezw. 120°. Dies ist ersichtlich nothwendig. Nun wissen wir aber, daß im Aeussern des Kegelschnittes jeder rationale Punkt Fixpunkt einer Collineation ist, und daß die rationalen Punkte die Ebene überall dicht überdecken. Der gesuchte Fundamentalbereich müßte sich daher an jeden seiner rationalen Punkte mit einer Ecke heran ziehen, deren Winkel durch den Poll'schen Winkel der betr. Automorphie bestimmt ist. Wir würden so zu einem

Bereiche kommen, der unserer Raumvorstellung absolut unzugänglich ist und welcher das Gegenteil von einer kontinuierlichen Gebiets-überdeckung darstellt. Es ist noch eine offene Frage, wie man die vorliegenden zahlentheoritischen Ergebnisse hinsichtlich der indefiniten Formen in ihrer Gesammtheit geometrisch aufzufassen hat.

Dabei liegen die Verhältnisse ausserhalb des Kegelschnittes auch durchaus anders, als es auf der Peripherie desselben der Fall ist. Auf der Peripherie waren die sämmtlichen Klassen aequivalenter Punkte, wie wir sahen, überall dicht verteilt. Das findet ausserhalb nicht mehr statt. Denn beispielsweise gibt es zu jedem rationalen Punkte ja nur eine endliche Anzahl aequivalenter Punkte. In gewisser Hinsicht sind also hier die aequivalenten Punkte sogar ausserordentlich dünn verteilt.

Wir wollen das vorliegende Problem

noch in abstracter Weise aussprechen. Wir wollen nämlich allgemein fragen: Ist es möglich die Classen der indefiniten Formen irgendwie in der Ebene zu lokalisiren? (so dass jeder Classe ein eindeutiger repräsentirender Punkt zugewiesen wird).

Eine Classe indefiniter Formen ist vollkommen bestimmt durch eine Reihe von ganzen Zahlen

$$\ldots u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots,$$

welche wir uns als Seitenlängen eines Umrisspolygons (im Gitter) oder als Winkelöffnungen einer Zickzacklinie (innerer Dreieckspfeiler) vorstellen mögen. Zwei Formen sind aequivalent, wenn ihre zugehörigen Zahlenreihen identisch ausfallen, wobei die Reihen natürlich noch gegeneinander verschoben sein können. Es käme nun darauf an, die Gesammtheit dieser Zahlenreihen in übersichtlicher Weise geeigneten Punkten einer Ebene zuzuordnen. Wir kommen so auf ein Problem von viel mehr allg

metischem als geometrischem Charac-
ter, welcher an die Ideen der Cantor'
schen Mengenlehre erinnert. Welches
ist der durch die Natur der Sache
gegebene „Ordnungstypus" der von unse-
ren Zahlenreihen gebildeten Menge?

Zum Abschlusse werden wir sagen
müssen, dass die Theorie der indefini-
ten Formen viel und schwieriger aber
auch interessanter ist, als die der defi-
niten Formen, weil sie auf noch unerle-
digte Fragestellungen führt. Aber eben
deshalb müssen wir diese Theorie jetzt
verlassen.

Nunmehr kehren wir zu den defini-
ten Formen zurück. Dabei werden wir
für den Rest der Vorlesung unsere Be-
trachtungen ausser auf Zahlentheorie
und Geometrie noch auf den dritten
Grundpfeiler der mathematischen
Gesammtwissenschaft, auf die Functio-
nentheorie, stützen. Wir überschreiben
nämlich das folgende Capitel:

Ueber den Zusammenhang der definiten quadratischen Formen mit der Theorie der elliptischen Functionen.

Der Grund dieses Zusammenhanges ruht auf der elementar-geometrischen Vorstellung eines Parallelengitters, zu welchem die quadratischen Formen einerseits und die elliptischen Functionen andrerseits hinführen.

Die Gittertheorie der definiten Formen ist uns von früher bekannt. Wir können dabei unsere Gitter (da es sich ausschliesslich um definite Formen handeln soll) in der gewöhnlichen Maafsbestimmung construiren. Wir tragen bei gegebener Form

$$f = a x^2 + b x y + c y^2$$

von einem Punkte o die Strecken $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$ unter dem Winkel

$$\chi = \arccos \frac{b}{2\sqrt{a c}}$$

gegen einander ab. Dabei werden wir gegen früher zweckmäßigerweise eine kleine Modification eintreten lassen. Wir legen nämlich die Strecken so, daß $\sqrt{c}$ durch eine positive Drehung um den Winkel φ in $\sqrt{a}$ übergeht. Diese Festsetzung hat das Unbequeme, daß in der Folge die x- und y- Axen die umgekehrte Lage haben werden, wie gewöhnlich. Sie ist aber nothwendig, wenn wir mit den üblichen Bezeichnungen aus der Theorie der elliptischen Functionen in Uebereinstimmung sein wollen.

An das erste Parallelogramm setzen wir fortgesetzt congruente an, die Ecken dieser Parallelogramme haben zu Coordinaten x und y ganze Zahlen. Der Werth der Form f im Punkte x y wird geometrisch durch die (elementar gemessene) Entfernung $r = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2}$ gegeben. Die Form f lösen wir in zwei conjugirt imaginäre Bestandtheile auf. Dabei können wir

noch dem einen Bestandteil einen Proportionalitätsfactor willkürlich hinzufügen, vorausgesetzt, dass wir dem anderen den reciproken Factor beilegen. Sollen die Bestandteile conjugirt imaginär sein, so muss der Factor die Form haben $= e^{i\varphi}$, so dass unsere Zerlegung lautet:

$$f = e^{i\varphi}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{a}}\,y\right) e^{-i\varphi}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{D}}{2\sqrt{a}}\,y\right).$$

Der einzelne Bestandteil ist eine complexe Zahl u. zw. gerade diejenige, welche dem Gitterpunkte $x\,y$ in der Gaussischen Ebene zukommt. Der Factor $e^{i\varphi}$ werde als <u>Azimuthalfactor</u> bezeichnet, der Winkel φ bedeutet nämlich dasjenige Azimuth, unter dem die x-Axe gegen die Axe der reellen Zahlen in der Gaussischen Ebene geneigt ist. Wir nennen

$$e^{i\varphi}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\,y\right)$$

eine <u>complexe Gitterzahl</u>. Die Form f erscheint dabei als <u>Norm dieses Systems von Gitterzahlen</u>.

Andrerseits führt ein parallelogrammatisches Gitter sofort auf den Begriff der doppelperiodischen Funktionen. Die Perioden ω_1, ω_2 derselben sind diejenigen complexen Zahlen, welche den Endpunkten der von o ausgehenden Parallelogrammseiten entsprechen. Die allgemeinste Periode lautet dann, unter x, y ganze Zahlen verstanden $\omega_1 x + \omega_2 y$. Wollen wir ω_1, ω_2 durch die Coefficienten der quadratischen Form ausdrücken, so haben wir

$$\omega_1 = \varepsilon^{i\varphi} \sqrt{a}$$

$$\omega_2 = \varepsilon^{i\varphi} \frac{b + \sqrt{\delta}}{2\sqrt{a}},$$

wie man erkennt, wenn man in dem oben stehenden Ausdrucke der Gitterzahlen $x = 1$, $y = 0$ bez. $x = 0$, $y = 1$ einträgt. Wollen wir umgekehrt die quadratische Form durch ω_1 und ω_2 ausdrücken, so berechnen wir die Norm der

allgemeinen complexen Gitterzahl oder, was dasselbe ist, die Norm der allgemeinen Periode

$$\omega_1 x + \omega_2 y.$$

Wir erhalten so:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y).$$

Nun interessirt uns in der Zahlentheorie weniger die einzelne Form als die ganze Klasse von Formen, welche durch die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

verbunden sind. Bei dieser Substitution erleiden auch die Perioden eine Umänderung.

Es wird nämlich

$$\omega_1 x + \omega_2 y = (\alpha\omega_1 + \gamma\omega_2) x' + (\beta\omega_1 + \delta\omega_2) y'.$$

Setzen wir dieser gleich

$$\omega_1' x' + \omega_2' y'$$

so haben wir

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \gamma\omega_2 \\ \omega_2' &= \beta\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

Die Perioden erfahren also eine Trans-

formation, welche wir als Transformation erster Ordnung bezeichnen. Sie entsteht aus der vorigen Transformation für die Gitterkoordinaten x, y durch bloße Vertauschung von β und γ. Durch den Vergleich mit der Zahlentheorie werden wir so darauf geführt, diese Transformationen erster Ordnung prinzipiell in die Betrachtung einzuführen und solche Funktionen zu suchen, welche nicht nur bei den Substitutionen ungeändert bleiben:

$$w' = w + m_1 \cdot \omega_1 + m_2 \omega_2$$

(also schlechtweg doppelperiodisch sind) sondern auch bei den Periodentransformationen

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \gamma\omega_2 \\ \omega_2' &= \beta\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

Diese Funktionen nennen wir nun elliptische Funktionen, so daß die elliptischen Funktionen durch die vorstehende ternäre Gruppe definirt sein sollen. Der Farbegriff aller solcher Funktionen soll – vorbe-

hatlich einer späteren Verschärfung des Begriffes, und unbeschadet späterer Verallgemeinerungen – ein elliptisches Gebilde heissen. Der einzelnen Klasse quadratischer Formen tritt also ein elliptisches Gebilde an die Seite. Nehmen wir im Speciellen die Coefficienten a, b, c der Form als ganze Zahlen an, so tritt der besondere Fall ein, dass jedesmal eine endliche Anzahl (= h) von Klassen zusammengehört, das sind die Klassen der gleichen Discriminante D. Dementsprechend gibt es dann auch h zusammengehörige elliptische Gebilde.

Wir nennen diese Gebilde, – also diejenigen, die zu ganzzahligen quadratischen Formen gehören –, singuläre elliptische Gebilde. Unser besonderes Interesse wird sein, zu untersuchen, wie sich diese singulären Gebilde von den allgemeinen elliptischen Gebilden unterscheiden und wie sich ihre zahlentheoretische Zusammengehörigkeit analytisch aus-

drückt.

Do. d. 13. II. 96. Zu der obigen Definition der elliptischen Functionen fügen wir als erste Einschränkung hinzu, dass die Function in den 3 Grössen u, ω, ω_2 homogen sein soll. Wir verlangen also, dass eine elliptische Function $\varphi(u, \omega_1, \omega_2)$ der folgenden Functionalgleichung genügen soll:

$$\varphi(\lambda u, \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^\nu \varphi(u, \omega_1, \omega_2),$$

in welcher ν den gemeinsamen Grad bezeichnet, in welchem jene 3 Grössen vorkommen. Wir haben es daraufhin nicht sowohl mit Functionen, sondern specieller mit „Formen" zu thun. Diesem Umstande wollen wir in der Bezeichnung Rechnung tragen; wir wollen, falls $\nu \geq 0$ ist, von elliptischen Formen sprechen und wollen als elliptische Functionen nur diejenigen bezeichnen, für welche $\nu = 0$ ist.

In Folge der verabredeten Homogenität können wir übrigens unsere

3 Argumente auf 2 reduciren. Dividiren wir nämlich unsere Form ν^{ten} Grades $\varphi(u, \omega_1, \omega_2)$ durch ω_2^ν und führen wir die neuen Größen $v = \frac{u}{\omega_2}$ und $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ein, so haben wir

$$\varphi(v, \omega, 1) = \frac{1}{\omega_2^\nu} \cdot \varphi(u, \omega_1, \omega_2).$$

Die Gleichung

$\varphi(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \varphi(u, \omega_1, \omega_2)$, welche die Invariantencigenschaft der elliptischen Formen ausspricht, nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\varphi\left(\frac{v + m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{\gamma\omega + \delta}, \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, 1\right) =$$

$$\left(\frac{1}{\gamma\omega + \delta}\right)^\nu \varphi(v, \omega, 1).$$

Wir werden jedoch von dieser inhomogenen Schreibweise im Allgemeinen keinen Gebrauch machen, weil, wie schon die vorstehende Gleichung zeigt, der Vorteil, mit zwei Variabeln auszukommen, nur durch Aufgeben der Symmetrie erkauft wird. Nur wenn das v gar nicht vorkommt, wenn wir also

eine sog. elliptische Modulfunction oder Modulform haben, werden wir auf die vorstehende Gleichung wiederholt zurück kommen.

Zunächst wollen wir die einfachsten Repraesentanten der elliptischen Functionen aufstellen. Wir stellen uns also die Aufgabe, Invarianten unserer ternären Gruppe aufzufinden. Allgemein wird man dies folgendermaßen bewerkstelligen: Man geht von irgend einem Ausdruck in den u, w_1, w_2 aus, transformirt diesen mittelst aller Substitutionen der Gruppe und bildet eine symmetrische Function aller so erhaltenen Ausdrücke. Ist die Gruppe eine endliche, so hat dies keine Schwierigkeit. Ist aber, wie in unserm Falle, die Gruppe unendlich, so muß man die Convergenz im Auge haben.

Gehen wir speciell von einer Potenz von u aus, u^v, so erhalten wir nach dem angegebenen Verfahren eine Invariante der Gruppe in dem folgen-

den Ausdruck:

$$\sum (m_1, m_2)\,(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^{\nu},$$

wo m_1, m_2 alle Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen. In der That erkennt man, daß bei sämmtlichen Substitutionen unserer Gruppe die Glieder der Reihe nur unter einander versetzt werden. Ausserdem ist dieser Ausdruck homogen vom ν^{ten} Grade. Der Convergenz wegen aber müssen wir festsetzen, daß $\nu \leqq -3$ genommen werde (vergl. die folgenden Ausdrücke für p, g_2 und g_3). Soll aber $\nu > -3$ genommen werden, so müssen wir die Reihe erst durch Hinzufügung passender Glieder convergent machen. (vergl. die folgende Gleichung für p.) In diesem Sinne ist die Darstellung der elliptischen Functionen von <u>Eisenstein</u> begonnen und von <u>Weierstraß</u> weiter ausgebildet worden. Die fundamentalen Functionen der Weierstraßischen Theorie sind die folgenden:

$$\wp(u, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} \right],$$

$$\wp'(u, \omega_1, \omega_2) = -2 \sum \frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^3},$$

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4},$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}.$$

Diese Ausdrücke sind in unserer Terminologie elliptische Formen vom bezw. $-2, -3, -4, -6^{\text{ten}}$ Grade. Es zeigt sich, daß man die ähnlich gebildeten Summen von Kleinerem ν auf die vorstehenden zurückführen kann.

Zwischen $\wp$, $\wp'$, g_2 und g_3 bestehen die folgenden Relationen:

$$\wp' = \frac{d\wp}{du}, \quad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Aus g_2 und g_3 bilden wir noch eine weitere wichtige elliptische Form Δ, welche in der Weierstrassschen Theorie zurücktritt und nur gelegentlich unter der Bezeichnung J^{-1} vorkommt. Man wird auf dieselbe geführt, wenn man die rechte Seite der

letzten Gleichung in Factoren zerlegt:

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)$$

und die Discriminante der Gleichung

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 0$$

bildet. Die neue Größe Δ ist bis auf einen Zahlenfactor gleich dieser Discriminante:

$$\Delta = 16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2 = g_2^3 - 27g_3^2 = 16 \cdot G$$

Hiernach wird Δ eine elliptische Form vom Grade - 12. Endlich bilden wir noch eine elliptische Function (Form 0ten Grades) oder, wie man in der Invariantentheorie sagt, eine absolute Invariante, indem wir setzen:

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \text{ oder was dasselbe ist:}$$

$$J - 1 = \frac{27 g_3^2}{\Delta}.$$

Unsere bisherige Definition der elliptischen Functionen, als Invarianten der ternären Gruppe, welche in ihren 3 Argumenten homogen sind, war

nur eine vorläufige. Wir bemerken nämlich, daß unter jene Definition auch Funktionen fallen, welche als Funktionen von u, w, w_2 alle möglichen Arten von Singularitäten haben. Wollen wir diese ausschließen, so müssen wir unsere Definition verengern. Wir sagen daher jetzt: Wir verstehen fortan unter einer elliptischen Funktion nur eine rationale Funktion von p, p', g_2 und g_3, welche überdies der Homogenitätsregel Genüge leistet. (Daß eine solche Funktion auch die oben geforderte Invarianteneigenschaft besitzt, versteht sich von selbst.

Dementsprechend verengern wir auch die frühere Definition des elliptischen Gebildes: Wir verstehen fortan unter dem elliptischen Gebilde die Gesamtheit der rationalen Funktionen von p, p', g_2, g_3.

Dieser Begriff deckt sich daher mit dem Begriffe eines Rationalitätsbereiches. In unserem Falle ist der

Rationalitätsbereich festgelegt durch die Grössen p, g_2, g_3, zu welchen noch die Grösse p' als Wurzel der Gleichung $p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$ adjungirt ist.

Wir werden jedoch neben dieser indirekten Definition der elliptischen Functionen eine independente Definition fordern, welche nicht auf die Darstellung derselben durch die p und p' ..... zurückgreift. Zu dem Zwecke müssen wir uns zunächst die Bedeutung der Periodenparallelogramme noch klarer machen.

Das Periodenparallelogramm war ursprünglich vom gruppentheoretischen Standpunkte definirt. Es war der Inbegriff aller nicht aequivalenter Punkte der u-Ebene, d. h. derjenigen Werte, welche durch Reine Substitution $u' = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ zusammenhängen. Das Periodenparallelogramm misst sonach die Discontinuität der Gruppe, es ist ihr Discontinuitätsbereich.

Betrachten wir es jetzt vom functionentheoretischen Standpunkt: Für diesen Fin-

Nicht wissen wir, daß eine doppelperiodische Function f, welche zu dem Periodenparallelogramm gehört, in jedem Parallelogramm der Gitterteilung genau dieselben Werte annimmt, wie in jedem anderen. Das Periodenparallelogramm erschöpft also alle Werte, deren die Function f fähig ist; es stellt ihren Fundamentalbereich dar.

Die beiden Begriffe: Discontinuitätsbereich der Gruppe und Fundamentalbereich der doppeltperiodischen Functionen fallen eben notwendig zusammen.

Eine weitere Frage wird sein, wie oft eine doppelperiodische Function einen vorgegebenen Wert in Fundamentalbereiche annimmt. Man überzeugt sich insbesondere, daß p jeden Wert an 2 Stellen, p' jeden Wert an 3 Stellen des Periodenparallelogramms annimmt. Man zeigt ferner, daß das Wertepaar (p, p') jeden Wert im Periodenparallelogramm nur an einer Stelle annimmt (wobei natürlich nur solche Werte in Betracht kommen, wel-

che vermöge der Relation

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$$

überhaupt möglich sind).

Wenn wir das Wertepaar p, p' betrachten wollen, so werden wir uns die Abhängigkeit von p und p' durch eine Riemann'sche Fläche vorstellen u. z. können wir entweder über der p-Ebene, den zwei zugehörigen Werten von p' entsprechend, eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche construiren, oder über einer p'-Ebene, den 3 Werten von p entsprechend, eine dreiblättrige Fläche ausbreiten. Die eine oder die andere Fläche ist, dem Vorstehenden zufolge, eindeutig auf das Periodenparallelogramm bezogen. Das Periodenparallelogramm ist einfach das conforme Abbild der zwei- (oder drei-) blättrigen Riemann'schen Fläche

Frei. d. 14. II. Jetzt ist es leicht, von der obigen indirecten zu einer directen Definition der elliptischen Functionen überzugehen, d. h. zunächst soweit die Variable in Betracht kommt. Indem wir

sagten: die elliptischen Functionen sind rationale Functionen von p und p', charakterisirten wir sie durch ihr Verhalten auf der Riemann'schen Fläche (p, p'): Eine rationale Function ist nämlich, functionentheoretisch gesprochen, eine solche, welche nirgends wesentlich singulär ist, oder auch eine solche, welche jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annimmt. Unsere frühere Definition besagt also, dass die elliptischen Functionen auf der Riemann'schen Fläche (p, p') keine wesentlichen Singularitäten haben, oder, was dasselbe ist, dass sie jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annehmen. Diese Eigenschaft überträgt sich nun aber sofort auf das Periodenparallelogramm. Wir können daher, was das angeht, die folgende independente Definition aufstellen.

Eine elliptische Function ist eine solche monogene Invariante der ternären Gruppe, welche ein Perioden-

<u>Parallelogramm der u-Ebene keine wesentliche Singularität besitzt oder jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annimmt.</u>

Damit ist unsere Definition aber noch nicht vollständig. Die elliptischen Funktionen sind doch Funktionen von 3 Argumenten u, ω_1, ω_2. Während durch das Vorstehende ihre Abhängigkeit von der Variabeln u präcisirt ist, bleiben uns jetzt ihre Eigenschaften noch in den ω_1, ω_2 zu charakterisiren. Funktionen, welche sich betreffs der Variabeln u in der angegebenen Weise verhalten, sind rationale Funktionen von p und p'. Die Coefficienten dieser rationalen Funktionen hängen ihrerseits von ω_1 und ω_2 ab. Sie sind nach unserer obigen Bezeichnung <u>Modulformen</u> $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ und genügen der Funktionalgleichung

$$\varphi(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \varphi(\omega_1, \omega_2).$$

Diese Gleichung ist aber nur Teil-

nition der Modulformen noch nicht ausreichend, sie entspricht hinsichtlich der Variabeln w_1, w_2 nur der allgemeinen Forderung, welche wir vorher hinsichtlich der Variabeln u aufstellten, wonach die elliptischen Functionen in u doppelperiodisch sein sollten. Es müssen vielmehr noch Einschränkungen hinsichtlich des functionentheoretischen Charakters der Modulformen hinzutreten, entsprechend dem Umstande, daß wir vorher in der Variabeln u das Auftreten von wesentlichen Singularitäten im Periodenparallelogramm ausschlossen. Dies geschah bereits oben durch die Festsetzung, daß die elliptischen Functionen auch von den g_2, g_3 rational abhängen sollten. Die Frage muß wieder sein, wie sich diese Bedingung independent ausdrückt, wenn wir w_1, w_2 als unabhängige Variable festhalten. Zu dem Zwecke beschränken wir uns zunächst auf Modulfunctionen im engeren Sinne, also auf Modulformen 0ten Grades. Diesel-

ben sind direct Functionen von $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ und genügen als solche nach pg. 303 der Gleichung

$$\Phi(\omega) = \Phi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right).$$

Andrerseits werden sie rationale Functionen nicht nur von g_2, g_3 sondern direct von der absoluten Invariante J sein.

Wir verlegen jetzt die Betrachtung in die Ebene der Variabeln ω. Wie zerlegt sich diese Ebene entsprechend den Substitutionen

$$\omega = \frac{\alpha\omega'+\beta}{\gamma\omega'+\delta}$$

in Discontinuitätsbereiche? Wie verhält sich J in einzelnen Discontinuitätsbereiche? Und wie verhält sich eine beliebige rationale Function von J?

Haben wir dieses erledigt so müssen wir noch ein besonderes Verfahren angeben, um von den Modulfunctionen zu den allgemeinen Modulformen eines von Null verschiedenen Grades aufzusteigen.

Bei der Frage nach einem Discontinuitätsbereiche der w-Ebene knüpfen wir an die Theorie der quadratischen Formen an, womit wir die damals abgeleiteten Resultate jetzt direct benutzen können. Nach pg. 299 oben ist das Periodenverhältnis $w = \frac{w'}{w_2}$ Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$a w^2 + b w + c = 0.$$

Da a, b, c die Coefficienten einer definiten quadratischen Form sind, werden die beiden Wurzeln conjugirt imaginär. Wir schreiben deshalb $D = -\Delta$ und bezeichnen die Wurzel mit positivem bez. negativem imaginären Bestandteil durch w bez. $\bar{w}$:

$$w = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \bar{w} = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Wir betrachten jetzt die Ebene a : b : c und die w-Ebene neben einander. Nach den vorstehenden Formeln gehört zu jedem Punkte der ersteren Ebene ein Punktepaar der zweiten Ebene. Setzen wir $w = x + iy$ und entsprechend $\bar{w} = x - iy$, so dass

x und y rechtwinklige Coordinaten in der w-Ebene bedeuten, so bestimmt sich die Lage unseres Punktepaares durch die Gleichungen:

$$x = \frac{-b}{2a} \quad , \quad y = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Die beiden Punkte des Paares sind hiernach reell nur dann, wenn $\Delta > 0$, wenn also der Punkt a, b, c im Innern des fundamentalen Kegelschnitts liegt; sie fallen zusammen, wenn a, b, c auf den Rand rückt; sie werden imaginär, wenn der Punkt a, b, c sich ausserhalb des Kegelschnitts befindet.

Umgekehrt gehört zu jedem Punkte der w-Ebene ein bestimmter Punkt der Ebene a, b, c. Berechnet man nämlich nach den vorstehenden Formeln $x^2 + y^2$, so ergibt sich $x^2 + y^2 = \frac{c}{a}$, worauf man die folgende Proportion aufschreiben kann:

$$a : b : c = 1 : -2x : x^2 + y^2.$$

Dieselbe zeigt in der That, dass dem Punkte x, y ein ganz bestimmter Punkt $a : b : c$ entspricht. Die Beziehung

Zwischen der w - Ebene und der a, b, c - Ebene, so können wir sagen, ist eine ein - zweideutige Verwandtschaft.

Nun sind uns die „Discontinuitäts" bereiche in der a, b, c - Ebene, welche die Gruppe der $\binom{\alpha\beta}{\gamma\delta}$ Collineationen entwirft, wohlbekannt. Da wir ferner auch den Zusammenhang der a, b, c - Ebene mit der w - Ebene kennen, so werden wir jetzt die Gestalt der Discontinuitätsbereiche aus jener in diese Ebene umsetzen können. Hier, zu dienen folgende Bemerkungen:

1. Dem fundamentalen Kegelschnitt der a, b, c - Ebene entspricht die reelle Axe der w - Ebene; denn $\Delta = 0$ ergibt nach pg. 317 $y = 0$.

2. Den Geraden der a, b, c - Ebene entsprechen in der w - Ebene Kreise, welche ihren Mittelpunkt auf der reellen Axe haben, und diese also rechtwinklig schneiden. denn aus der Gleichung $Aa + Bb + Cc = 0$ entsteht vermöge der obigen Proportion:

$$A - 2Bx + C(x^2 + y^2) = 0.$$

3. Den $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$-Collineationen in der Ebene $a : b : c$, welche den fundamentalen Kegelschnitt in sich transformiren, entsprechen in der w-Ebene Kreisverwandtschaften, welche die reelle Axe ungeändert lassen. Dabei werden Kreise, welche die reelle Axe senkrecht schneiden, in ebensolche übergeführt. U. s. w. verschieden Kreisverwandtschaften, welche den Collineationen $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ entsprechen, die reelle Axe gleichstimmig in sich. Sie führen die positive w-Halbebene in die positive über; dagegen verschieden diejenigen Kreisverwandtschaften, welche aus den Collineationen $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ hervorgehen, die reelle Axe ungleichstimmig in sich; sie vertauschen die positive mit der negativen Halbebene.

4. Die imaginären Tangenten des fundamentalen Kegelschnitts, welche von den Punkten des Kegelschnitts, innerem auslaufen, verwandeln sich in die Minimallinien, welche

von den reellen Punkten der w-Ebene ausgehen. (Wir denken uns hier also vorübergehend die a, b, c und ebenso die x, y der w-Ebene selbst als komplexer Werte fähig). Sei nämlich a_0, b_0, c_0 irgend ein Punkt im Innern des Kegelschnittes. Die Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Tangenten haben Parameterwerte w, welche der Gleichung genügen $a_0 w^2 + b_0 w + c_0 = 0$. Sei w_0 eine Wurzel dieser Gleichung, so lautet die Gleichung der zugehörigen Tangente $a w_0^2 + b w_0 + c = 0$, wo a, b, c die laufenden Koordinaten der Tangente sind. Dem variablen Punkte a, b, c entspreche in der w-Ebene der variable Wert w, wobei $a w^2 + b w + c = 0$. Wir haben ersichtlich: $w = w_0$, oder, wenn wir ausführlich setzen $w = x + iy$, $w_0 = x_0 + iy_0$: $x + iy = x_0 + iy_0$. Hier gelten x, y, wie wir schon andeuteten, selbst als komplexer Werte fähig. Unter dieser Voraussetzung haben

wo die Gleichung einer Minimalgeraden der w - Ebene, welche durch den reellen Punkt x_0, y_0 hindurchgeht. Ebenso entsprechen der zweiten Tangente im Punkte a_0, b_0, c_0 die zweite Minimalgerade durch x_0, y_0.

5. Der Winkel unter dem sich zwei Curven in der a, b, c - Ebene schneiden, gemessen im Sinne der Cayley'schen Maassbestimmung, ist gleich dem Winkel, unter dem sich die entsprechenden beiden Curven in der w - Ebene treffen gemessen im elementaren Sinne.

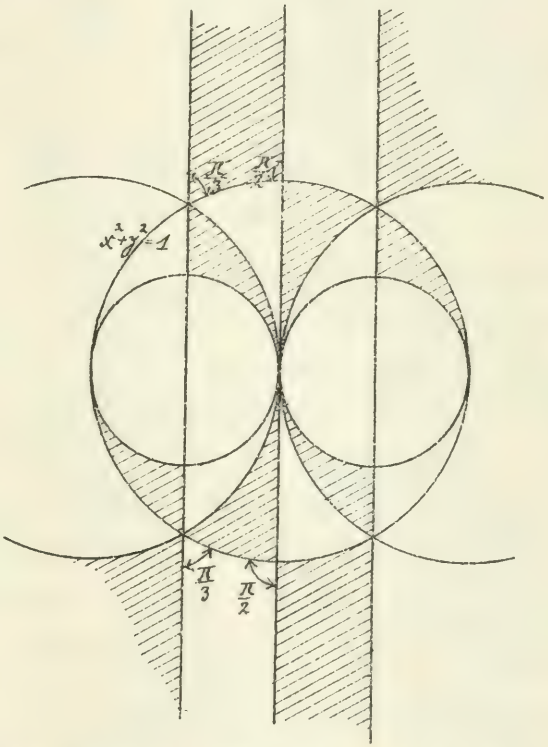
Der Cayley'sche Winkel war definirt durch $\frac{i}{2}$ multiplizirt mit dem Logarithmus der Doppelverhältnisse, welche die beiden gegebenen Richtungen mit den Tangenten an den fundamentalen Kegelschnitt bilden. Nun ist unsere Beziehung zwischen der a, b, c - und der w - Ebene allerdings keine projective, bei der das Doppelverhältniss schlechtweg ungeändert bleibt. Indessen ist im Infinitesimalen eine jede Punkt-

transformation eine projective Bezie-
hung. Bei der Messung der Winkels
kommt es aber nur auf das Verhal-
ten der Linienelemente im Schnitt-
punkte an. Das Doppelverhältniss je-
ner 4 Richtungen in der a, b, c-
Ebene wird daher gleich dem Doppel-
verhältniss der 4 entsprechenden
Richtungen in der w-Ebene, d. h.
der den gegebenen Curven entspre-
chenden Richtungen und der beiden
Minimallinien durch ihren Schnitt-
punkt. Der Logarithmus dieser
Grösse ist aber, noch multipli-
cirt mit $i/2$, direct gleich dem
elementar genommenen Winkel.
d. 10. II. Hiernach ist es leicht, die
ganze Dreiecksfigur aus der a, b, c-
Ebene in die w-Ebene zu übertragen.
Wir grenzen hiernächst dasjenige Ge-
biet ab, welches dem schraffirten
Elementardreieck der reducirten Kau-
mer aus unserer Dreiecksfigur ent-
spricht. Dieses hatte zu Sei-
ten die Geraden $a = b$, $b = 0$, $a = c$.

Nach der Proportion von pg. 317 sind die entsprechenden Linien der w-Ebene durch die Gleichungen gegeben:

$$x = -\frac{1}{2}\ ,\ x = 0 \text{ und } x^2 + y^2 = 1\ ;$$

sie grenzen in der w-Ebene zwei spiegelbildlich gleiche <u>Kreisbogendreiecke</u> ab, das eine in der positiven, das andere in der negativen Halbebene gelegen. Die elementar gemessenen Winkel dieses Kreisbogendreiecks betragen, wie die Figur zeigt, bez. $\pi/3$, $\pi/2$ und 0. Dieselben Winkel besitzt, wie es sein muss, unser gradliniges Dreieck in der a, b, c-Ebene bei Cayley'scher Maass-



bestimmung.

Nun entstand die ganze Dreieckspi„ gur aus dem reduzirten Dreiecke da. durch, daß wir auf dieses die Opera„ tionen der Gruppe $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ausüb„ ten. Dieselben Operationen üben wir auf einer der beiden Kreisbogendreiecke, et„ wa auf das in der positiven Halbebene gelegene aus. Dabei entstehen nach 2) und 3) pag. 318 und 319 unendlich viele Abbilder unseres Kreisbogen„ dreiecks u. zw. liegen bei den Opera„ tionen von der Determinante +1 die sämmtlichen Abbilder in der positi„ ven, bei denen von der Determinan„ te -1 in der negativen Halbebene. Aber es bleiben noch neben jedem erhal„ tenen Dreiecke Gebiete frei.

Beispielsweise können wir zu dem Spiegelbilde des anfänglichen Drei„ ecks in der negativen Halbebene nicht hingelangen. Überhaupt bleiben alle solche und nur solche Gebiete frei, welche Spiegelbilder der bisher construirten Kreisbo„

gendreiecke in bezug auf die reelle Axe sind. Wir wollen alle bisher construirten Gebiete schraffiren und die bisher frei gebliebenen unschraf- firt lassen.

Die Spiegelung an der reellen Axe bedeutet die Operation $x' = x,\ y' = -y$ bez. $w' = \bar{w}$. Setzen wir diese Operation mit einer Operation der $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ Gruppe zusammen, so ergiebt sich:

$$w' = \frac{\alpha \bar{w} + \beta}{\gamma \bar{w} + \delta}.$$

Durch alle Operationen dieser Art wird das Ausgangsdreieck successive in alle bisher frei gebliebenen Gebiete verwandelt.

Wir sprechen von der „<u>erweiterten</u>" Gruppe, wenn wir gleichzeitig die Operationen

<u>I.</u>) $w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, $w = \frac{\alpha \bar{w} + \beta}{\gamma \bar{w} + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$

betrachten. Sie enthält als Unter- gruppen

<u>II.</u>) $w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$

III.) $w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, $\bar{w}' = \frac{\alpha \bar{w} + \beta}{\gamma \bar{w} + \delta}$, $\alpha\delta = \beta\gamma = +1$

und als fernere Untergruppe:

IV.) $w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

Man bemerke wohl, daß das Wort <u>erweiterte Gruppe</u> hier in anderem Sinne gebraucht ist, wie bei den Betrachtungen in der a, b, c- Ebene. Die Erörterung, welche wir soeben vornahmen, hat in der a, b, c- Ebene keinen Sinn, denn die Operation $x' = x$, $y' = -y$ bedeutet dort, wie aus der Proportion von pg. 31x hervorgeht, einfach die Identität.

Auch die Schraffirung haben wir in der w - Ebene anders eingerichtet, als in der a, b, c- Ebene. Es entsprechen nämlich die schraffirten Gebiete der positiven Halbebene den schraffirten, die schraffirten Gebiete der negativen Halbebene den nicht schraffirten Gebieten der a, b, c- Ebene. Dasselbe gilt für die nicht- schraffirten Gebiete der w - Ebene. Der Grund

für diese Discordanz liegt darin, daß die Beziehung zwischen der a, b, c- und der w - Ebene eine ein - zweideutige Verwandtschaft ist.

Das Resultat dieser Ueberlegungen ist folgender: (wegen der genaueren Begründung verweisen wir auf „Nb. Unt." Bd I. pg. 112 und 113.):

Unser ursprünglicher Kreisbogendreieck bildet den Discontinuitätsbereich der erweiterten Gruppe (I) für die ganze w - Ebene. Gleichzeitig liefert es den Discontinuitätsbereich der Untergruppe III für die positive Halbebene. Dagegen bildet unser schraffirter Ausgangsdreieck zusammen mit einem anliegenden nichtschraffirten Dreieck den Discontinuitäts-bereich der Untergruppe II für das Gebiet der ganzen Ebene, den der Untergruppe IV für das Gebiet der positiven Halbebene.

Die in eingeteilte w - Ebene wird das geometrische Substrat sein, in welchem wir die elliptischen Nb.

dul-funktionen studiren. Hinsichtlich des hiermit besprochenen Ueberganges zur w- Ebene bemerken wir jedoch noch Folgendes: An sich wäre es für unsere functionentheoretischen Zwecke gar nicht nötig gewesen, unsere geradlinige Figur in eine Kreisbogenfigur um- zusetzen. Es geschieht dieses nur aus Connivenz gegen unsere Gewöhnung, indem wir uns eine complexe Größe gerne in der Gaussischen Weise durch die rechtwinkligen Coordinaten eines Punk- tes repraesentirt denken. Im Grunde gibt aber auch unsere Dreiecksfigur eine völlig zureichende geometrische Darstellung der Complexen, da doch jeder complexe Wert von w einem ganz bestimmten Punk- te im Innern der Kegelschnitte zu- geordnet ist, nämlich demjenigen Punkte, von welchem die Tangente mit dem Parameter w an den funda- mentalen Kegelschnitt gelegt wer- den kann. Wir brauchen uns dieses Innere nur mit zwei Blät- tern überdeckt zu denken, um

denselben Vorteil zu haben, den wir durch die Unterscheidung der positiven und negativen Halbebene w erreichen. Uebrigens ist dieser doppelt überdeckte Kegelschnittinnere nur ein specieller Fall der allgemeinen zu den ebenen algebraischen Curven gehörigen „projectiven" Riemann'schen Flächen, deren functionentheoretische Verwendung ich längst in Vorschlag gebracht habe. (Cfr. Vorl. über R. Fl. I. pg. 255).

Wir gehen nun zur Betrachtung der Modulfunctionen über. Zunächst genügt jede Modulfunction $\varphi(w)$ der Functionalgleichung:

$$\varphi(w) = \varphi\,\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}\,, \quad \text{wo } \alpha\delta-\beta\gamma=+1.$$

Daraus folgt: <u>Für unsere Modulfunctionen ist jeder Discontinuitätsbereich der Gruppe $\alpha\delta-\beta\gamma=+1$ Fundamentalraum</u>; d. h. die Modulfunctionen nehmen in jedem Discontinuitätsbereiche der Gruppe dieselben Werte an, wie in jedem anderen. In's

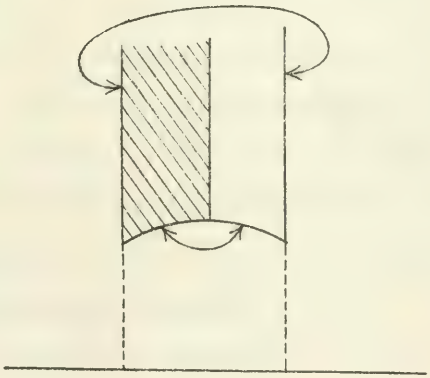
Besondere nehmen sie auch in cor-
respondirenden Randpunkten der rel.
ben Bereiches die gleichen Werte an.
Gewöhnlich wählt man unter den
sämmtlichen möglichen Fundamen-
talbereichen den auf der pg. 331 gezei-
chneten aus. Derselbe besteht aus
dem schraffirten Ausgangsdreieck von
pg. 323. und dem längs der imagi-
nären Axe sich anlegenden Neben-
dreiecke. Die Zuordnung der Rand-
punkte ist durch Pfeile angedeutet;
sie wird durch die Substitutionen
vermittelt $= w - w' + 1$ und $w' = -\frac{1}{w}$.
Unter den Modulfunctionen betrach-
ten wir zunächst die Function
$J(w)$ genauer. Wir deuten uns ihre Werte
in einer J-Ebene und fragen nach
der Beziehung zwischen dieser und
dem Fundamentalbereich der w-Ebene.
Die Theorie der Modulfunctionen
lehrt (vergl. M. F. Bd. I. pg. 114),
dass diese Beziehung eine eindeu-
tig umkehrbare ist, oder, anders
ausgedrückt, dass $J(w)$ jeden

keiner Werte im Fundamentalbereiche einmal und nur einmal annimmt.

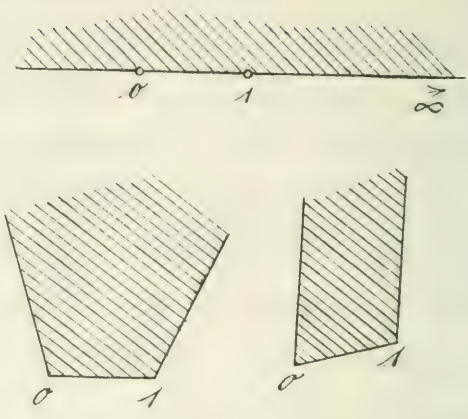
Wir vergleichen dieses Resultat mit dem, was wir früher über den Fundamentalraum der Gruppe $U' = U + m_1 w_1 + m_2 w_2$ d. h. über das Periodenparallelogramm abgeleitet haben.

Wir sahen, dass dieses gerade zu ein conformes Abbild der Riemann'schen Fläche (p, p') war. Hier können wir entsprechend sagen: Der Fundamentalraum der w-Ebene ist ein conformes Abbild der schlichten z-Ebene.

Die Dinge liegen also hinsichtlich der Variabeln w im Grunde einfacher, als hinsichtlich der Variabeln u. Spe. will zeigt sich, dass das schraffirte Dreieck des Fundamentalbereiches ein conformes Abbild der positiven



J-Ebene ist, wo bei den Punkten $J = 0, 1, \infty$ die Ecken des Kreisbogendreiecks entsprechen, nämlich bez. die Punkte, in denen die zusammenstossenden Seiten die Winkel $\pi/3$, $\pi/2$ und 0 bilden. Wir können uns den Übergang von der positiven J-Ebene zu dem Kreisbogendreieck in der w-Ebene wieder so denken, dass wir ihn als das Resultat einer gesetzmässigen continuirlichen Verzerrung ansehen, wie durch die nebenstehenden Figuren angedeutet wird.



Wir sprechen jetzt von <u>Modulfunctionen im Allgemeinen.</u> Wir definirten diese früher dadurch, dass wir sagten: es sind rationale Functionen von J. Dieser können wir auch so ausdrücken: die Modulfunctionen sind in der J-Ebene eindeutig und haben

nirgends einen wesentlich singulären Punkt. Wir geben nun die in Aussicht genommene independente Definition der Modulfunctionen, indem wir sie in der τ-Ebene charakterisiren. Wir sagen: Modulfunctionen sind solche eindeutige Functionen von w, welche

1. die Functionalgleichung erfüllen

$$\varphi\left(\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}\right) = \varphi(w),$$

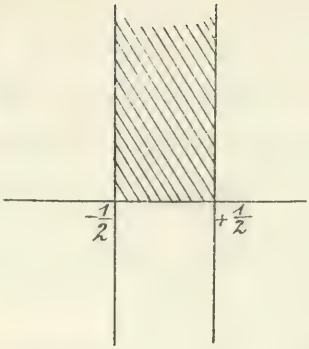
und welche

2. im Innern der einzelnen Fundamentalbereiches relativ zu diesem Bereich Keinen wesentlich singulären Punkt haben.

Der Ausdruck: relativ zum Fundamentalbereich muss dabei noch näher präcisirt werden. Er soll etwas Anderes bedeuten, wie wenn wir sagen würden: relativ zur w-Ebene: und denkt sich mit ihm nur im Allgemeinen, nämlich nur in solchen Punkten, wo der Fundamentalbereich selbst keine Besonderheiten aufweist. Um seine Bedeutung auch für die

Ecken festzulegen, müssen wir auf die
J-Ebene zurückgreifen, in welcher die
Modulfunctionen schlechtweg keine we-
sentliche singuläre Stelle haben sollten.
Nun bildet sich die Umgebung der Punkte
$J=0$ und $J=1$ zwar nicht conform,
aber doch mit rationalem Winkel-
vergrößerungsverhältnis auf die w-
Ebene ab. Daraus folgt, daß auch in
den Ecken unseres Dreiecks mit den
Winkeln $\pi/3$ und $\pi/2$ das Auftreten von
wesentlichen Singularitäten relativ
zur w-Ebene schlechtweg ausgeschlos-
sen werden muß. Anders verhält
es sich mit derjenigen Ecke, wel-
che sich in's Unendliche erstreckt.
Wir fragen zunächst, wie sich J selbst
in dieser Ecke verhält; gestattet J hier
eine Entwickelung nach aufsteigenden
Potenzen von $\frac{1}{w}$ mit nur einer
endlichen Zahl negativer Potenzen?
Das ist nicht der Fall, vielmehr hat
J, als Function von w, bei $w=\infty$
eine wesentlich singuläre Stel-
le. Man beherrscht aber diese

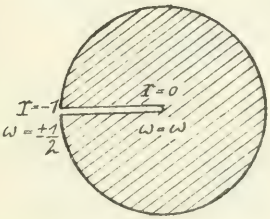
Singularität, indem man sie durch Einführung einer neuen Variabeln fortschaffen kann.



Diese Hülfsvariable ist

$$r = e^{-i\omega};$$

(es ist dieselbe Größe, welche in der Jacobi'schen Bezeichnungsweise q^2, in der Weierstrass'schen h^2 heisst.) War zunächst die Abbildung bestimmt, welche in der ω-Ebene entsteht, wenn r unter Vermeidung eines von $r=0$ bis $r=\infty$ längs der negativen reellen Axe laufenden Schnittes alle seine Werte einmal durchläuft, so besteht diese aus einem Parallelstreifen, welcher durch die in den Punkten $\omega = \pm\frac{1}{2}$ parallel zur imaginären Axe gezogenen Geraden begrenzt wird, u. zw. entspricht der in der positiven ω-Ebene gelegene Halb-



streifen dem Inneren, der in der negativen w- Ebene gelegene Halbstreifen dem Aeusseren der Einheitskreises in der r- Ebene. Der Unendliche des positiven Halbstreifens entspricht dem Mittelpunkte der Einheitskreises, d. h. dem Werte $r = 0$.

Man kann nun $J(w)$ mittelst der Variabeln r in eine Reihe entwickeln, welche folgendermaßen lautet (vergl. M. F. I. pg. 154.):

$$J = \frac{1}{1728\, r} + \sum_{r=0}^{r=\infty} a_r r^r .$$

Aus dieser Reihe erkennen wir zweierlei: erstlich, dass J für $r = 0$ unendlich wird, und zweitens, dass es, als Function von r aufgefasst, nicht wesentlich singulär ist.

Wir verlangen nun von den Modulfunctionen überhaupt, dass sie an der Stelle $w = \infty$, als Functionen von r aufgefasst, nicht wesentlich singulär sein sollen, mithin nach aufsteigenden Potenzen von r entwickelt, nur eine endliche

Anzahl von negativen Potenzen von x besitzen dürfen. Dieser sagen wir, wenn wir sagen: die Modulfunktionen sollen, relativ zum Fundamentalbereiche, auch an der Stelle $w = \infty$ keine wesentliche Singularität haben. Uebrigens convergirt die angegebene Reihe für J für alle Werthe $|x| < 1$ und gibt damit eine Darstellung der J in der ganzen positiven Halbebene w.

Frei. den 21. II. Längs der <u>reellen Axe</u> wird das Verhalten der Modulfunktionen ein sehr eigenthümlicher. Wenn wir nämlich unsere Eintheilung der w-Ebene nach der reellen Axe hin vervollständigen wollen, so erkennen wir, dass sich hier die Kreisbogendreiecke unbegrenzt häufen. Daraus folgt, dass die Modulfunktion hier jeden Werth an unendlich vielen unmittelbar benachbarten Stellen annimmt. Jeder Punkt der reellen Axe wird daher ein wesentlich singulärer Punkt der Funktion. Man kann die Frage aufwerfen: Welchen Werth nimmt diese eigent-

sich die Modulfunction an einem be-
stimmten Punkte der reellen Axe selbst
an? Dabei müssen wir zwischen den ratio-
nalen und den irrationalen Punkten
unterscheiden. Zu jedem rationalen
Punkt läuft ein Kreisbogendreieck
(und sogar eine unendliche Zahl solcher Drei-
ecke) je mit einer Spitze aus. Nähern wir
uns einem rationalen Punkt, indem
wir senkrecht auf die reelle Axe zu-
schreiten, so bleiben wir in einem be-
stimmten Fundamentalbereiche. wir
können daher auch von einem bestim-
ten Werte sprechen, welchen die Modul-
function bei der bestimmten Art der
Annäherung in diesem Punkte annimmt.
Dagegen passiren wir, wenn wir
auf einen irrationalen Punkt in
irgend einer Richtung zuschreiten,
fortgesetzt neue Dreiecke. Es giebt
daher keinen bestimmten Grenz-
wert, dem die Function in einem
solchen Punkte zustrebt. die Function
bleibt hier völlig unbestimmt.

Dies hat im Sinne der Weierstrass-

schen Functionentheorie zur Folge, dass man die Modulfunctionen über die reelle Axe nicht fortsetzen kann; sie bilden historisch das erste Beispiel einer Function mit natürlicher Grenze.

Allerdings können wir, wenn uns irgend ein Ausdruck zur Berechnung einer Modulfunction gegeben ist, daraus möglicherweise ebensowohl Werte für ein ω der positiven, wie für eins der negativen Halbebene ableiten. So ist es z. B. für $d = \frac{g_2^3}{\Delta}$, wenn wir für g_2^3 und $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ die oben gegebenen Partialbruchreihen eintragen. Die so entstehenden Werte von J gehören aber im Sinne der modernen Functionentheorie zu zwei ganz verschiedenen Functionen, welche nicht durch analytische Fortsetzung untereinander zusammenhängen.

Hiernach stellt das Symbol $J(\omega)$ zwei verschiedene Functionen dar, von denen die eine in der positiven, die andere in der negativen Halbebene definirt ist. Ana-

log ist es mit allen unseren Modul-
funktionen. Wir werden weiterhin unter $J(w)$
immer die erstere von beiden verstehen,
also voraussetzen, dass $w = \frac{w_1}{w_2}$ einen
positiv-imaginären Bestandteil hat.
Dies bringt dann mit sich, dass wir
uns auf solche $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ Substitutionen
beschränken müssen, deren Determi-
nante $= +1$, denn die anderen ver-
tauschen die beiden Halbebenen
a mit einander.

Wir beschäftigen uns nun mit den
Modulformen. Diese sollten rationa-
le Funktionen von g_2 und g_3 sein,
welche homogen sind, wobei wir g_2 das
Gewicht -4 und g_3 das Gewicht -6 bei-
zulegen hatten. g_2 und g_3 selbst, sowie
die Discriminante Δ sind die ein-
fachsten Modulformen. Ihre Darstel-
lung in den Variabeln w_1, w_2 wur-
de pg. 306. mitgeteilt.

Wenn wir Funktionen der beiden
unabhängigen Variabeln w_1 und w_2
betrachten wollen, so liegt es zu-
vörderst nahe, die Variabeln in R_4

zu deuten. Hinsichtlich der Substitutionengruppe:

$$w_1' = \alpha w_1 + \beta w_2$$
$$w_2' = \gamma w_1 + \delta w_2, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

zerlegt sich dieser R_4 in eine Reihe von Discontinuitätsbereichen. Es wäre nun die Frage, wie man die Modulformen und insbesondere wie man g_2 und g_3 funktionentheoretisch durch ihr Verhalten in einem einzelnen dieser Bereiche charakterisiren könnte. Dieser directe Weg zum Studium der Modulformen ist indessen bisher nicht mit Erfolg eingeschlagen worden, er scheint erhebliche Schwierigkeiten zu haben. Dasselbe ist aber auch nicht nötig, da wir nur homogene Functionen von w_1, w_2 kennen. In Folge dessen können wir die ganze Untersuchung indirect in die w-Ebene selbst verlegen. Wir geben zunächst ein Verfahren an, durch welches man von $f(w)$ zu den Formen g_2 und g_3 aufsteigen kann.

Zu dem Zweck betrachten wir den Differentialquotienten $\frac{d\,J(\omega)}{d\,\omega}$ und sehen zu, wie sich derselbe bei den Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ verhält. Zunächst haben wir die Gleichung:

$$J(\omega') = J(\omega).$$

Durch Differentiation folgt, da $\frac{d\,\omega'}{d\,\omega} = \left(\frac{1}{\gamma\omega+\delta}\right)^2$ ist:

$$\frac{d\,J(\omega')}{d\,\omega'} \cdot \frac{1}{(\gamma\omega+\delta)^2} = \frac{d\,J(\omega)}{d\,\omega}$$

Multiplizieren wir hier mit $\frac{1}{\omega_2^2}$ und berücksichtigen, daß $\omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$, so haben wir

$$\frac{d\,J(\omega')}{d\,\omega'} \cdot \frac{1}{\omega_2'^2} = \frac{d\,J(\omega)}{d\,\omega} \cdot \frac{1}{\omega_2^2}$$

Wir sind somit zu einer Form $\varphi(\omega_1, \omega_2) = \frac{d\,J}{d\,\omega} \cdot \frac{1}{\omega_2^2}$ gekommen, welche homogen vom 2ten Grade in ω_1, ω_2 ist und welche bei den Substitutionen von pg. 341 gänzlich ungeändert bleibt. Dieses φ wird daher als Modulform zu bezeichnen sein.

Es gelingt nun, mit Hülfe dieser

Form φ und der Function J die anderen Modulformen zusammenzusetzen, wie die folgenden Formeln zeigen

$$g_2 = \frac{\pi^2}{3J(1-J)}\,\varphi^2$$

$$g_3 = \frac{\pi^3 i}{27 J^2 (1-J)}\,\varphi^3$$

$$\Delta = \frac{\pi^4}{27 J^4 (1-J)^3}\,\varphi^6$$

(vergl. Hierzu M. F. I pg.).

Aus diesen Formeln können wir das Verhalten von g_2, g_3 und Δ bei beliebigen Werten von ω_1 und ω_2 ablesen, wobei wir nur, wie es bei homogenen Variabeln stets geschehen muß, das gleichzeitige Verschwinden, sowie das gleichzeitige Unendlichwerden von ω_1 und ω_2 ausschliessen. Zunächst zeigt sich, daß alle 3 Größen im Innern der ω-Halbebene nirgends unendlich werden. Denn die Werte $J=0$ und $J=1$ sind, wie aus der Lagerung unserer Dreiecksteilung hervorgeht, dreifache bez. zweifache Werte der Function $J(\omega)$. Daher

verschwindet der Differentialquotient und also auch $\varphi'(w)$ an diesen Stellen von der zweiten bez. ersten Ordnung. Das Nullwerden des Nenners wird daher bei unseren Ausdrücken für g_2, g_3, Δ durch das Nullwerden des Zählers aufgehoben, ja es bleibt für g_2 und g_3 bei $J = 0,1$ noch je eine einfache Nullstelle übrig. Man erkennt auch aus der Dreiecksteilung, daß die genannten Stellen (die Ecken der Dreiecksteilung) die einzigen Nullstellen von $\varphi'(w)$ im Innern der Halbebene sind. Daraus ergibt sich die folgende Zusammenstellung (NB. für das Innere der Halbebene):

g_2 wird Null in den Ecken vom Winkel $\pi/3$ und nur in diesen

g_3 " " " " " " vom Winkel $\pi/2$ und nur in diesen

Δ wird nirgends Null.

Zugleich sind sämmtliche Nullstellen von g_2 und g_3 einfache Nullstellen.

Wir orientiren uns ferner über das

Verhalten unserer Formen in den rationalen Punkten der reellen Axe. Dabei können wir uns auf den Punkt $w = \infty$ oder $\omega_2 = 0$ beschränken, weil jeder andere rationale Punkt $w = \beta/\delta$ durch eine Substitution unserer Gruppe nach dem Punkte $w = \infty$ transformirt werden kann, wobei die Modulform ungeändert bleibt. Wir führen, ebenso wie bei der Untersuchung von J im Punkte $w = \infty$ die Hülfsvariable $r = e^{2\pi i w}$ ein; man kann dann folgende Reihenentwickelungen aufstellen (vergl. M. F. I. pg. 153 und 154).

$$g_2 \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 = \frac{1}{12} + 20 \sum \frac{m^3 r^m}{1 - r^m}$$

$$g_3 \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^6 = \frac{1}{216} - \frac{7}{9} \sum \frac{m^5 r^m}{1 - r^m}$$

$$\Delta \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} = r \prod' (1 - r^m)^{24}$$

Bonn, den 27. II. Die rechten Seiten dieser Ausdrücke können wir uns für die Umgebung der Stelle $\omega_2 = 0$ oder, was dasselbe ist, der Stelle $r = 0$ in convergente Reihen nach steigenden Po-

tenzen von r ungeordnet denken, wir bezeichnen sie dementsprechend mit $\mathfrak{P}(r)$ und zwar bleiben diese $\mathfrak{P}(r)$ bei $r=0$ endlich. Dagegen werden die Größen g_2, g_3, Δ selbst bei der Annäherung an den Punkt $\omega_2 = 0$ unendlich groß u. zw. wird die Art des Unendlich-werdens, allgemein zu reden, gemessen durch einen Ausdruck von der Form

$$\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \cdot \mathfrak{P}(r)$$

Ganz analoger gilt von jedem rationalen Punkte $g\omega_1 + \delta\omega_2 = 0$ auf der reellen Axe, wie wir nicht ausführen, da jeder solche Punkt durch eine Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ nach ∞ geworfen werden kann.

Diese Eigenschaft überträgt sich sofort auf die Modulformen überhaupt, welche ja rationale Functionen von g_2 und g_3 sein sollten, auch diese verhalten sich bei $\omega_2 = 0$ wie $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \mathfrak{P}(r)$, wo nun aber $\mathfrak{P}(r)$ eine endliche Zahl negativer Potenzen enthalten kann. Insbesondere werden wir die ganzen Modulformen bevorzugen, welche als ganze

rationale Functionen von g_2 und g_3 definirt sind. Wir sind jetzt in der Lage, dieselben independent durch ihr Verhalten im Fundamentalbereiche zu characterisiren, ohne auf ihre Darstellung durch g_2 und g_3 zurückzugreifen. Unsere Definition wird lauten:

1. Die ganzen Modulformen $f(w_1, w_2)$ sind homogene Functionen von w_1 und w_2 (Ihr Grad sei $-r$)

2. Sie erfüllen die Functionalgleichung:

$$f(\alpha w_1 + \beta w_2, \gamma w_1 + \delta w_2) = f(w_1, w_2).$$

3. Sie sind im Innern der positiven w-Halbebene nirgends singulär, also überall endlich.

4. Sie verhalten sich bei der Annäherung an den unendlich fernen Zipfel der Fundamentalbereiches wie

$$\left(\frac{2\pi}{w_2}\right)^r \mathfrak{f}(r),$$

wo in $\mathfrak{f}(r)$ nur positive Potenzen von r auftreten.

Umgekehrt schliesst man, dass eine Function, welche diesen Bedin-

genügen genügt, eine ganze rationale Function von g_2 und g_3 ist. Es deckt sich also die neue Definition mit der früheren. Legt man Wert darauf, daß in den Reihenentwickelungen nach x nur ganze Zahlen als Coefficienten auftreten, so wird man nicht die Größen g_2, g_3 selbst, sondern $\gamma_2 = 12 g_2$ und $\gamma_3 = 216 g_3$ zu Grunde legen. Die Discriminante Δ erfüllt die Forderung ganzzahliger Coefficienten von selbst, sie ist mit γ_2 und γ_3 durch die Gleichung verbunden: $1728 \Delta = \gamma_2^3 - \gamma_3^2$. Von diesem Standpunkte aus empfiehlt es sich auch statt der absoluten Invariante J die Function $\gamma = \frac{\gamma_2^3}{\Delta} = 1728 J$ einzuführen. Die <u>ganzen ganzzahligen Modulformen</u> im Allgemeinen werden wieder durch die Bedingungen 1) bis 4) definirt, wobei der 4. Bedingung hinzuzufügen ist, daß in der Reihe $f(x)$ nur ganzzahlige Coefficienten auftreten. Man erkennt, daß diese ganzen ganzzahligen Modulformen ganze ganzzahlige Functionen von g_2, g_3 und Δ sind, welch' letzteres sich

hier selbstständig neben f_2 und f_3 stellt, da es sich aus f_2 und f_3 nur mit dem Nenner 1728 zusammensetzen läßt.

Wir gehen nun auf die Bedeutung der elliptischen Functionen für unsern eigentlichen Gegenstand, für die Zahlentheorie ein. Es handelt sich ausschließlich um negative Discriminante. Wir unterscheiden dabei drei Stufen unserer bisherigen arithmetischen Entwickelungen:

1. Auf der obersten Stufe beschäftigen wir uns mit den Gitterzahlen d. h. mit gewissen complexen Zahlen, welche den Eckpunkten eines beliebigen Parallelgitters in der Gaußischen Ebene zugeordnet sind. Sind w_1 und w_2 diejenigen complexen Zahlen, welche den Endpunkten der von 0 auslaufenden Seiten des ersten Parallelogrammes zukommen, so ist die allgemeine Form der Gitterzahlen

$$w_1 x + w_2 y;$$

Die Bezeichnung wird praktischer Weise von vorneherein so eingerichtet, daß $w = \frac{w_1}{w_2}$ einen positiven imaginären Bestandteil hat. Da die Definition der Gitterzahlen an die Punkte des Gitters, nicht an die Parallellinien desselben anknüpft, so wird man alle zu demselben Punktgitter gehörigen Parallelgitter als gleichwertig ansehen. Dem entspricht, daß man alle Größen w_1', w_2' als gleichwertig ansieht, welche mit w_1, w_2 durch die Substitutionen verbunden sind:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \alpha w_1' + \beta w_2' \\ w_2 &= \gamma w_1' + \delta w_2' \end{aligned}\right\} (\alpha\delta - \beta\gamma) = +1,$$

wobei wir uns auf die Det. $+1$ beschränken, damit die Verabredung betr. den imaginären Teil von w aufrecht erhalten bleibt.

2. Auf der zweiten Stufe betrachten wir die definiten quadratischen Formen, welche als Formen der Gitterzahlen definirt sind:

$a x^2 + b x y + c y^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$

Es sind dies insbesondere die positiven quadratischen Formen.

Den vorstehenden Substitutionsformeln entsprechend interessirt uns dabei weniger die einzelne Form, als die Classe aequivalenter Formen.

3. Auf der dritten Stufe untersuchen wir nicht die quadratische Form, sondern die quadratische Gleichung:

$a x^2 + b x y + c y^2 = 0$ bez. $a w^2 + b w + c = 0$.

Bei diesem Standpunkte werden nicht die Zahlen a, b, c selbst, sondern nur die Verhältnisse $a : b : c$ in Betracht gezogen.

Bei 1. kommt von unserem geometrischen Bilde die ganze Figur der Punktgitters nach Lage und Größe zur Geltung. Bei 2. kommt es nur auf die Gestalt, nicht auf die Orientirung des Gitters an. Wenn wir nämlich das Punktgitter um φ beliebig drehen, also $e^{i\varphi}(\omega_1 x + \omega_2 y)$ an Stelle von $\omega_1 x + \omega_2 y$ und entsprechend $e^{-i\varphi}(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$ an Stelle

von $\bar{w}_1 x + \bar{w}_2 y$ setzen, so hat dieses auf die Norm der Gitterzahlen keinen Einfluss. Bei 3. bleibt ausser der Lage auch die absolute Grösse der Gitterma„schen willkürlich. Wenn wir nämlich die ganze Gitterfigur in dem Verhält„nisse ϱ verkleinern, so werden die Zahlen a, b, c durch $\varrho a, \varrho b, \varrho c$ ersetzt. Dadurch wird aber die Glei„chung $a w^2 + b w + c = 0$ nicht geändert Andrerseits gehört zu jedem Gitter ein System elliptischer Funktionen mit den Perioden w_1, w_2, welches unge„ändert bleibt, wenn wir w_1, w_2 durch ein aequivalentes Paar w_1', w_2' ersetzen Wir behaupten aber mehr Die Gleichheit gewisser elliptischer Funktionen zieht die Aequivalenz der Perioden nach sich. Die elliptischen Funktionen vertreten also mit den vollen analytischen Invarian„ten unserer Zahlentheoretischen Gebilde.

Des Genaueren stellt sich die Sache so: Von dem Standpunkte 1. sind g_2 und g_3 die vollen Invarianten des Punktgitters, so dass, wenn g_2 und g_3, gebildet

für 2 Periodenpaare übereinstimmen, die zu den Periodenpaaren gehörigen Punktgitter nach Gestalt und Lage identisch sind.

Auf dem Standpunkte 2) sind außer $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ Norm (g_2) und Norm (g_3) die reinvarianten. Daß durch die Gleichheit der absoluten Invarianten sowie der Normen die Orientierung der Punktgitter noch nicht festgelegt sein kann, ist von vornherein klar. Wenn wir nämlich das Punktgitter um o drehen, also ω_1 und ω_2 durch $\varepsilon^{i\varphi}\omega_1$ und $\varepsilon^{i\varphi}\omega_2$ ersetzen, so wird wegen der Homogenitätseigenschaft von g_2 und g_3 sowohl J wie Ng_2 und Ng_3 nicht verändert.

3. Von dem dritten Standpunkte aus ist $J(\omega)$ die einzige Invariante in dem Sinne, daß die Gleichung $J(\omega) = J(\omega')$ zur Folge hat, daß ω und ω' Wurzeln von zwei äquivalenten quadratischen Gleichungen sind, daß also

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}.$$

Beim Beweise dieser Behauptungen beginnen wir mit dem Falle 3) Wir wissen, daß $J(w)$ in seinem Fundamentalbereiche jeden Wert nur einmal annimmt. In der w-Ebene hat daher $J(w)$ denselben Wert nur für solche Punkte, welche an aequivalenten Stellen verschiedener Fundamentalbereiche liegen. Aus der Gleichung $J(w) = J(w')$ folgt also $w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$. Die Punktgitter sind ähnlich, aber nicht notwendig ähnlich gelegen und gleich.
Darauf stützen wir uns beim Beweise der Behauptungen ad 2) und 1).
Wir haben jedenfalls: $J\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = J\left(\frac{w_1'}{w_2'}\right)$.
Hieraus ergibt sich, wie wir sahen:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha w_1' + \beta w_2'}{\gamma w_1' + \delta w_2'}$$

oder homogen geschrieben:

$$\varrho w_1 = \alpha w_1' + \beta w_2'$$
$$\varrho w_2 = \gamma w_1' + \delta w_2' .$$

Nun ist aber

$$g_2(\varrho w_1, \varrho w_2) = \varrho^{-4} g_2(w_1, w_2)$$

und

$$g_3(\varepsilon\omega_1, \varepsilon\omega_2) = \varepsilon^{-6} g_3(\omega_1, \omega_2);$$

ferner haben wir

$$g_2(\omega_1', \omega_2') = g_2(\alpha\omega_1' + \beta\omega_2', \gamma\omega_1' + \delta\omega_2') = g_2(\varepsilon\omega_1, \varepsilon\omega$$

also

$$g_2(\omega_1', \omega_2') = \varepsilon^{-4} g_2(\omega_1, \omega_2)$$

und ebenso

$$g_3(\omega_1', \omega_2') = \varepsilon^{-6} g_3(\omega_1, \omega_2).$$

Im Falle 1.) lautet die Voraussetzung $g_2(\omega_1', \omega_2') = g_2(\omega_1, \omega_2)$ und $g_3(\omega_1', \omega_2') = g_3(\omega_1, \omega_2)$. Dann ergibt sich

$$N(\varepsilon^2) = 1 \text{ oder } \varepsilon = \pm 1.$$

In diesem Falle sind die Periodenpaare direct aequivalent, u. zw: wenn $\varepsilon = +1$, mittelst der Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ wenn $\varepsilon = -1$, mittelst $\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$. Die Punktgitter sind also völlig identisch.

Im Falle 2) setzen wir nun voraus $Ng_2(\omega_1', \omega_2') = Ng_2(\omega_1, \omega_2)$ und $Ng_3(\omega_1', \omega_2') = Ng_3(\omega_1, \omega_2)$. Daraus folgt mit Rücksicht auf das Vorstehende:

$N\varrho^2 = 1$, also $\varrho = e^{i\varphi}$.

In diesem Falle sind die Periodenpaare ω_1, ω_2 und ω_1', ω_2' also bis auf die Orientierung aequivalent, die Punktgitter sind der Gestalt nach identisch, nur der Lage nach sind sie eventl. gegen einander gedreht.

Wie man sieht, ist der eigentliche Kernpunkt dieser fundamentalen Sätze, dass $\mathfrak{F}$ ein Fundamentalbereich der z-Ebene jeden Wert gerade einmal annimmt (dass dieser Fundamentalbereich direkt eine eindeutige Abbildung der $\mathfrak{F}$-Ebene ist).

Frei. d. 28. II. Wir haben uns jetzt mit der folgenden systematischen Auffassung der elliptischen Funktionen vertraut zu machen, welche in den Vorlesungen über Modulfunktionen entwickelt ist.

Die bisher betrachteten elliptischen Funktionen waren definirt als Invarianten der Gruppe

$$w' = e + m_1 w_1 + m_2 w_2$$
$$w_1' = \alpha w_1 + \beta w_2$$
$$w_2' = \gamma w_1 + \delta w_2,$$

welche relativ zu dem Discontinuitäts-bereich der Gruppe keine wesentlichen Singularitäten besitzen. Wir erweitern jetzt die Theorie dahin, daß wir auch die Untergruppen dieser Gesammtgruppe in Betracht ziehen. Dabei aber soll es sich nur um Untergruppen von endlichem Index handeln. Wir suchen dann die eindeutigen, homogenen Invarianten dieser Untergruppen auf, welche relativ zu dem betr. Discontinuitätsbereiche keine wesentliche Singularität besitzen. Diese Invarianten sind elliptische Functionen im weiteren Sinne. Während die bisherigen Functionen rationale Functionen von p, p', g_2 und g_3 waren, erweisen sich diese neuen Functionen als algebraisch von p, p', g_2 und g_3 abhängig. Damit soll natürlich nicht gesagt sein, daß alle algebraischen Functionen

dieser Größen elliptische Functionen seien, vielmehr entsteht die Frage, welche algebraischen Functionen von p, p', g_2 und g_3 als Invarianten einer unserer Untergruppen erhalten werden können. Wiederum kann man die ganzen algebraischen Functionen bevorzugen und kann die Forderung hinzufügen, dass nur ganzzahlige Coefficienten in ihren Entwickelungen auftreten sollen.

Die Theorie hat nun der Reihe nach folgende Aufgaben zu erledigen.

1. Alle Untergruppen der ternären Gruppe aufzuzählen.
2. Die zugehörigen Discontinuitätsbereiche anzugeben.
3. Die Functionen zu bilden, welche die Discontinuitätsbereiche zu Fundamentalbereichen haben und relativ zu denselben keine wesentlichen Singularitäten besitzen.
4. Die algebraischen Beziehungen zu untersuchen, in welchen diese Functionen zu den p, p', g_2 und g_3 stehen.

Ich will mich hier, wie in den Vorle-

kungen" geschieht, einen Augenblick auf Modulsubstitutionen, also die binäre Gruppe der ω - Substitutionen beschränken. In dieser Hinsicht werde etwa Folgendes ausgeführt:

Von den Untergruppen sind die „Congruenzgruppen" am besten untersucht, das sind solche, welche aus der Gruppe

$$\omega_1 = \alpha\,\omega_1' + \beta\,\omega_2'$$
$$\omega_2 = \gamma\,\omega_1' + \delta\,\omega_2'$$

durch Kongruenzen ausgezeichnet werden, denen man die Coefficienten ihrer Substitutionen unterwirft. Speziell bezeichnet man also „Hauptcongruenzgruppe p^{ter} Stufe" diejenige Gruppe, deren Substitutionen modulo n der Identität congruent sind. Die Coefficienten ihrer Substitutionen genügen den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv 1\,, & \beta &\equiv 0 \\ \gamma &\equiv 0\,, & \delta &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \pmod{n}.$$

Ein Beispiel für eine umfassendere

Congruenzgruppe n^{ter} Stufe liefert die Bedingung:

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}.$$

In der That überzeugen wir uns leicht, dass die so charakterisirten Substitutionen allemal eine Gruppe bilden.

Die zu Congruenzgruppen gehörigen Invarianten nennen wir <u>Modulfunctionen n^{ter} Stufe.</u>

Wollen wir nun umgekehrt auf die Substitutionen der ω eingehen:

$$\omega' = \omega + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

indem wir die ω Substitutionen bei Seite lassen.

Hier sind die Untergruppen besonders leicht anzugeben. Sie ergeben sich, wenn wir ω_1, ω_2 durch irgend welche ganzzahligen Combinationen Ω_1, Ω_2 ersetzen und enthalten die Substitutionen:

$$\omega' = \omega + m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2,$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= a\omega_1 + b\omega_2 \\ \Omega_2 &= c\omega_1 + d\omega_2 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}(a, b, c, d \text{ ganze Zah-} \\ \text{len von irgend wel-} \\ \text{cher Determinante } ad - bc = N).\end{array}$$

Der Diskontinuitätsbereich besteht wieder aus einem Parallelogramme; R_1, R_2 sind die Ecken des Parallelogrammes. Die Gesamtheit der Diskontinuitätsbereiche liefert wieder eine Gitterteilung der Ebene, welche, wie wir uns ausdrücken, der ursprünglichen Gitterteilung eingelagert ist. Das einzelne Elementarparallelogramm der neuen Gitter ist N-mal so groß, wie das der alten. Mit $P\,P'\,P_2\,P_3$ bezeichnen wir solche Funktionen, welche zu dem neuen Gitter in derselben Beziehung stehen, wie $p\,p'\,p_2\,p_3$ zu dem alten. Man wird dann nach der algebraischen Abhängigkeit fragen, welche $P, P', \ldots$ und $p, p', \ldots$ verknüpft. Diese Frage nennt man das <u>allgemeine Transformationsproblem N^{ten} Ordnung</u>.

Besondere Fälle des allgemeinen Problems ergeben sich, wenn die Zahlen a, b, c, d gemeinsame Teiler besitzen. Die äußerste Spezialisierung ist die, daß wir einen Teiler n

herausheben können:

$$\Omega_1 = n(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)$$
$$\Omega_2 = n(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2),$$

von der Beschaffenheit, daß wieder $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ wird. Dann ist gleichzeitig $N = n^2$. Statt der vorstehenden können wir dann ebenso gut die mit ihr aequivalente Transformation betrachten:

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1 &= n\omega_1\\ \Omega_2 &= n\omega_2\end{aligned}\right\}.$$

Diesen speciellen Fall bezeichnet man als <u>Multiplikation der Perioden.</u>

Bei der Multiplikation haben wir mit Rücksicht auf die Homogenität der elliptischen Functionen:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{p}(u, n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^2}\mathfrak{p}\left(\frac{u}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$
$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{p}'(u, n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^3}\mathfrak{p}'\left(\frac{u}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$
$$\mathfrak{G}_2 = g_2(n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^4}\mathfrak{G}_2(\omega_1, \omega_2)$$
$$\mathfrak{G}_3 = g_3(n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^6}\mathfrak{G}_3(\omega_1, \omega_2)$$

Bei der Multiplication stimmen also bis auf einen Zahlenfactor $\frac{1}{n^r}$ die G_2, G_3 mit den g_2, g_3 direct überein und die P, P' mit den p, p', gebildet für ein durch n getheiltes Argument.

Die Functionen $p(n), p'(n)$ sind nicht nur in dem Fundamentalbereiche ω_1, ω_2 sondern auch in dem Bereiche $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ elliptische Functionen, und lassen sich als solche durch die einfachsten zu diesem Bereiche gehörigen Functionen, d. i. durch P und P' rational darstellen. Man kommt dann zu Formeln

$$(p, p') = \mathrm{Rat}(P, P'),$$

welche man „Multiplicationsformeln" nennt. Umgekehrt stellen sich P und P' algebraisch durch p und p' dar. Diese umgekehrte Behandlung nennt man die Teilung der elliptischen Functionen. Analog stellt sich neben die vorhin betrachtete directe Transformation der elliptischen Functionen die inverse Transfor-

mation. Bei gegebenem p und p' sind P und P' n^2-deutig bestimmt. Ist nämlich

$$P_0 = \frac{1}{n^2} p(n_0, \omega_1, \omega_2), \quad P_0' = \frac{1}{n^3} p'(n_0, \omega_1, \omega_2)$$

ein Werthepaar, welcher zu den vorgegebenen Werten von p und p' gehört, so erhalten wir hieraus alle unterschiedenen Wertepaare P, P', indem wir bilden

$$P = \frac{1}{n^2} p\left(n_0 + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right) \quad \begin{cases} \lambda = 0, 1, \ldots n-1 \\ \mu = 0, 1 \ldots n-1 \end{cases}$$

$$P' = \frac{1}{n^3} p'\left(n_0 + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$

Diese Wertepaare sind in der That alle von einander verschieden und liefern bei der Multiplication mit n alle dieselben Werte wie p und p', wie P_0 und P_0'. Es sind auch die einzigen Wertepaare von dieser Eigenschaft, wie daraus hervorgeht, daß jedes Paar (p, p') im Fundamentalbereiche nur einmal vorkommt.

Hier ist nun leicht zu sehen, daß das Teilungsproblem mit der vor-

hin eingeführten Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe der ω_1, ω_2 zusammenhängt. Verlangen wir nämlich alle Substitutionen $\omega_1 = \alpha\omega_1' + \beta\omega_2'$, $\omega_2 = \gamma\omega_1' + \delta\omega_2'$, $(\alpha\delta - \beta\gamma = +1)$ zu bestimmen, bei denen die sämmtlichen vorangeführten Werte von P und P' ungeändert bleiben, so kommen wir direct zu

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv 1, \beta \equiv 0, \\ \gamma &\equiv 0, \delta \equiv 1. \end{aligned}\right\} (\text{mod. } n),$$

d. h. eben zur Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe. Unsere sämmtlichen P P' sind also Functionen der n^{ten} Stufe.

Diese wenigen Erläuterungen mögen genügen, um in die Fragestellung einzuführen; das Nähere mögen Sie in den „Vorlesungen" und anderwärts nachstudiren.

Ich gebe nun einige Resultate, welche man für niedere Stufenzahlen erhalten hat. Zunächst im Anschlusse an die Weier-

strassische Theorie:

1. Modulformen der zweiten Stufe erhält man hier aus der Gleichung

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 0,$$

nämlich deren Wurzeln e_1, e_2, e_3. Man pflegt insbesondere die Differenzen $e_i - e_k$ zu betrachten.

Diese e_i, bez. $e_i - e_k$ sind, wie man aus ihrem Zusammenhange mit den g_2, g_3 ersieht, von der 2ten Dimension. Eine Modulfunction der zweiten Stufe erhält man daraus durch Quotientenbildung. Diese Modulfunction ist der Legendre'sche Modul, oder vielmehr das Quadrat desselben:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

Geometrisch bedeutet k^2 das Doppelverhältnis der vier Verzweigungspunkte $e_1\ e_2\ e_3\ \infty$ auf der Riemann'schen Fläche (p, p').

An diese Bedeutung soll die Bezeichnung λ, welche in den „Modulf." für k^2 benutzt wird, erin-

nern. Bei den Vertauschungen der vier Verzweigungspunkte nimmt das Doppelverhältniss im Ganzen 6 verschiedene Werte an. Der einzelnen Vertauschung entspricht eine Transformation erster Ordnung der Perioden, also eine Substitution aus unserer Gruppe $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$. Gegenüber den Substitutionen der Gesammtgruppe ist daher der Legendre'sche Modul 6 verschiedener Werte fähig, was mit dem Index (6) der Hauptvorgrenzgruppe 2ter Stufe übereinstimmt.

2. In der Weierstrass'schen Theorie kommen ferner Ausdrücke vor von der Form:

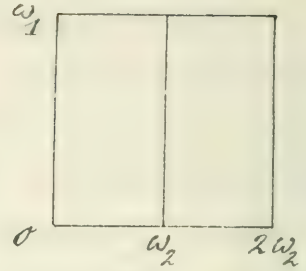
$$\sqrt{p(u) - e_\lambda}.$$

Dieselben sind, ebenso wie $p(u)$, eindeutige doppeltperiodische Funktionen von u; ihr Periodenparallelogramm ist aber doppelt so gross wie das ursprüngliche. (Beispielsweise gehört zu

$$\sqrt{p(u) - e_1},$$

das nebenstehende Parallelo-

gramm.)
Unsere Ausdrücke entstehen daher durch eine Transformation zweiter Ordnung.
Andrerseits sind die Ausdrücke



$$\sqrt{e_i - e_k}$$

eindeutige Funktionen von ω_1, ω_2; es sind Modulformen von der 1ten Dimension und der 4ten Stufe.
3. Die Jacobi'schen Funktionen setzen sich aus den eben genannten Bestandteilen in folgender Weise zusammen.

$$\sin am(z, k) = \sqrt{e_1 - e_3} : \sqrt{p(u) - e_3}$$
$$\cos am(z, k) = \sqrt{p(u) - e_1} : \sqrt{p(u) - e_3}$$
$$\Delta am(z, k) = \sqrt{p(u) - e_2} : \sqrt{p(u) - e_3}$$

Sie sind bez. von der 4ten, 2ten und 2ten Stufe. Dieser Umstand, sowie die vorstehenden Formeln zeigen deutlich, wie unsymmetrisch und von unserem Standpunkte unzweckmäßig die Jacobi'schen Funktio-

nen gewählt sind.

Ferner aber aus den Entwickelungen der „Modulfunctionen".

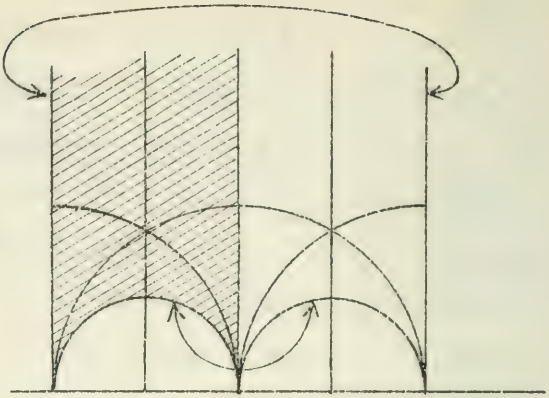
1. „Die Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe kann uns als Modell für die Untersuchung der höheren Kongruenzgruppen dienen; sie ist in diesem Sinne Abschnitt II Cap. 4 der „Modulfunctionen" ausführlich besprochen. Ihr Index ist gleich 6; die Hauptkongruenzgruppe 2ter Stufe umfasst sozusagen den 6ten Teil der Substitutionen der Gesammtgruppe.

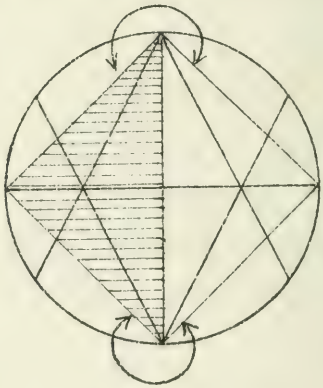
Dementsprechend besteht der Discontinuitätsbereich aus 6 Discontinuitätsbereichen der Gruppe $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ bez. aus 12 Discontinuitätsbereichen der „erweiterten" Gruppe.

In der w-Ebene kann man diese in der aus der nebenstehenden Figur ersichtlichen Weise abgrenzen.

Viel übersichtlicher aber wird seine Gestalt in der a, b, c-Ebene

ne, wie überhaupt die geradlinige Figur vor der Kreisbogenfigur entschieden den Vorzug verdient. Hier ist nämlich der Discontinuitätsbereich zweiter Stufe ein Quadrat, welches sich aus den beiden in der Mittellinie zusammenstoßenden „Construktionsdreiecken" zusammensetzt. Durch die „Hülfslinien" zerfallen letztere in je 6 „Elementardreiecke" entsprechend den 2 × 6 Kreisbogendreiecken der w-Ebene.





Wir erwähnten bereits, daß das Doppelverhältniß λ eine Modulfunktion der 2ten Stufe ist; λ nimmt daher

alle reellen Werte in dem genannten Bereiche an. Darüber hinaus zeigt sich nun aber, daß λ im Kontinuitätsbereiche zweiter Stufe jeden Wert mehr einmal annimmt. Man kann daher diesen Bereich geradezu als konformes Abbild der λ-Ebene betrachten; der positiven λ-Halbebene entspricht dabei die eine (in den Figuren schraffirte) Hälfte dieses Bereiches. In Folge dessen wird die Function λ(w) die charakteristische Invariante unserer Untergruppe in demselben Sinne, wie J(w) die charakteristische Invariante der Gesammtgruppe liefern. Wir können nämlich aus der Gleichung λ(w) = λ(w') sofort auf die folgende Gleichung schließen:

$$w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \quad \text{wo} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{mod. } 2.$$

In der That nimmt λ(w) an denjenigen Stellen, welche vermöge der Hauptkongruenzgruppe 2ter Stufe

äquivalent sind, und was das Wichtigere ist, nur an diesen Stellen die gleichen Werte an.

2. Bei den Kongruenzgruppen höherer Stufen werden wir in entsprechender Weise zunächst den Index der Untergruppe, dann ihren Diskontinuitätsbereich bestimmen. Letzterer setzt sich aus einzelnen Diskontinuitätsbereichen der Gesamtgruppe zusammen, wobei die Anzahl derselben durch den Index der Untergruppe angegeben wird.

Hierbei greift eine sehr wichtige Unterscheidung Platz, welche an die Zuordnung der Randcurven anknüpft. Die Pfeile welche wir an unseren Figuren anbringen, weisen darauf hin, daß wir die Diskontinuitätsbereiche unserer Gruppen als geschlossene Flächen aufzufassen haben, indem wir uns die zugeordneten Randcurven zusammengebogen denken. Dabei kann sich entweder eine geschlossene Fläche vom Charakter der Kugelfläche ($p = 0$) ergeben, oder eine

Fläche von höherem Zusammenhange. Die Riemann'sche Theorie der algebraischen Functionen lehrt nun, dass die Flächen der ersteren Art conform auf die Kugel bez. die schlichte Ebene abgebildet werden können. Bezeichnen wir mit w eine complexe Variable, welche in gewöhnlicher Weise in dieser Ebene ausgebreitet ist, so stellt $\mu(w)$ eine Modulfunction dar, welche in dem betr. Discontinuitätsbereiche der w-Ebene jeden Wert nur einmal annimmt. Wir bezeichnen eine solche Function als Hauptmodul. Die fundamentale Eigenschaft des Hauptmoduls ist die, dass jede andere Modulfunction des betr. Bereiches eine rationale Function des Hauptmoduls ist. Da, hingegen kann man der Riemann'schen Theorie zufolge die Flächen mit $p > 0$ nicht auf die schlichte Ebene, sondern nur auf eine mehrfach überdeckte Ebene, eine Riemann'sche Fläche abbilden, welche

zu derselben Zahl p gehört. Die einzelne Stelle der Riemann'schen Fläche wird aber nicht durch eine complexe Variable u, sondern nur durch die Zusammenstellung zweier Variabler (u, u') festgelegt, welche algebraisch von einander abhängen. Dementsprechend werden die Modulfunctionen eines Bereiches von höherem Zusammenhange nicht mehr rational durch eine, sondern durch zwei Functionen (u(w), u'(w)) ausdrückbar, zwischen denen eine algebraische Relation besteht. Im Falle p > 0 giebt es also keinen Hauptmodul. Diese fundamentalen Begriffe sind im 3ten Abschnitte der „Modulf." auseinandergesetzt. Sie treten natürlich nicht nur bei den Modulfunctionen, sondern überhaupt bei den eindeutigen Functionen eines beliebigen Fundamentalbereiches, also auch beispielsweise bei den elliptischen Functionen in ihrer Abhängigkeit von u, in Kraft.

Die bisher von uns betrachteten Fundamentalbereiche liefern in der That bereits geschlossene Flächen mit $p = 0$ und $p > 0$. Zu der ersteren Kategorie gehört der Fundamentalbereich der Gesamtgruppe der $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ Substitutionen und der der Hauptkongruenzgruppe 2ter Stufe. Dementsprechend lernten wir in den Funktionen $J(w)$ und $\lambda(w)$ Modulfunktionen kennen, welche in den bez. Fundamentalbereichen jeden Wert nur einmal annehmen. Alle anderen Modulfunktionen der bez. Bereiche lassen sich durch diese „Hauptmodulen" rational ausdrücken, wie wir bereits sagten. Andrerseits gibt das Periodenparallelogramm der u-Ebene bei der Zusammenbiegung eine geschlossene Fläche vom Charakter der Ringes, eine Fläche mit $p = 1$. Dementsprechend gibt es keine Funktion, welche ihr Periodenparallelogramm jeden Wert nur einmal annimmt. Dagegen kennen wir

2 Funktionen $p(u)$ und $p'(u)$, welche zusammengenommen die einzelnen Punkte der Periodenparallelogrammes in eindeutiger Weise festlegen und welche dieses conform auf die Riemann'sche Fläche (p, p') abbilden. Wollen wir die allgemeineren doppelperiodischen Funktionen des Periodenparallelogramms rational darstellen, so brauchen wir dazu beide Funktionen p und p'.

3. Bei der Untersuchung der folgenden Stufen (d. h. der jedesmaligen Hauptkongruenzgruppen) zeigt sich, daß die Fundamentalbereiche der 3ten, 4ten, 5ten Stufe noch $p = 0$, die der höheren Stufen aber $p > 0$ besitzen. Daher haben wir bei der 3ten, 4ten und 5ten Stufe Hauptmoduln, welche bez.

$$\mu(\omega),\ o(\omega),\ \xi(\omega)$$

heissen, und durch welche sich die übrigen Modulfunktionen der betr. Fundamentalbereiche rational ausdrücken. Im's Besondere kann die

Funktion $J(w)$ selbst als Modulfunktion der 2ten, 3ten, 4ten, und 5ten Stufe aufgefaßt werden. Daher ist J eine rationale Funktion sowohl von λ, μ, ν als von ξ.

Umgekehrt hängen diese Funktionen ihrerseits algebraisch von J ab. Die Art dieser Abhängigkeit ist von anderer Seite her wohlbekannt. Es sind nämlich die Irrationalitäten, welche sich bei der Darstellung von λ, μ, ν und ξ durch J ergeben, keine anderen, als die Irrationalitäten der regulären Körper resp. ist

$\lambda(J)$ die Dieder-Irrationalität für $n=3$.
$\mu(J)$ – Tetraeder "
$\nu(J)$ – Oktaeder "
$\xi(J)$ – Ikosaeder "

Es ist dies ein sehr merkwürdiger Zusammenhang, dem wir leider nicht nicht weiter nachgehen können.

4. Die Tendenz der „Modulfunktionen" ist nun geradezu, neben dem J der Weierstrass'schen und dem λ der Jacobi'schen Theorie die Moduln hö„

hierer Stufen, welche sonst in der Litteratur ziemlich vernachlässigt werden, also insbesondere die Tetraeder –, die Oktaeder – und die Ikosaeder – Irrationalität systematisch zu berücksichtigen. Dieselbe Forderung werden wir auch nach der zahlentheoretischen Seite stellen. Man sollte die Theorie der singulären elliptischen Gebilde nicht einseitig für die J und λ entwerfen, wie es bisher geschehen ist, sondern sollte auch die ϱ, σ und ζ in Betracht ziehen. Das kann nicht schwer sein und wird doch viel Interesse bieten. Quadratische Formen (a, b, c) werden dabei nur insofern als aequivalent gelten, als sie durch Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ in einander übergehen, die modulo 3, bez. 4 oder 5 zur Identität kongruent sind. Dieselbe Festsetzung ist in Bezug auf den Zahlenmodul 2 bereits von Kronecker u. A. überall da getroffen worden, wo es sich um $\lambda(w)$ handelt.

5. Der Uebergang von Modulfunctionen niederer zu solchen höherer Stufe kann in besonderen Fällen durch Wurzelziehen bewerkstelligt werden. Diese Bildungsweise der Modulfunctionen ist von besonderer Wichtigkeit, sie soll daher an einzelnen Beispielen erläutert werden.

Ausgehend von dem Legendre'schen Modul λ bildet man

$$\sqrt[2]{\lambda}, \quad \sqrt[4]{\lambda}, \quad \sqrt[8]{\lambda}.$$

Es zeigt sich, daß diese Functionen in der w-Ebene eindeutig und Modulfunctionen bez. von der

$$4^{\text{ten}}, \quad 8^{\text{ten}}, \quad 16^{\text{ten}} \text{ Stufe}$$

sind. Ferner zeigt sich, daß man auch aus dem Ausdrucke $\lambda(\lambda-1)$ eine Reihe von Wurzeln ausziehen kann, so daß sich Congruenzmoduln ergeben. Es werden nämlich

$$\sqrt[2]{\ }, \quad \sqrt[3]{\ }, \quad \sqrt[4]{\ }, \quad \sqrt[6]{\ }, \quad \sqrt[8]{\ }, \quad \sqrt[12]{\ }, \quad \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$$

eindeutige Modulfunctionen

bez. von der

4 , 6 , 8 , 10 , 16 , 24 , 48

Stufe. Dieselben treten ebenfalls in der Literatur ausserordentlich viel auf, insbesondere kommt $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ bei Weber unter der Bezeichnung $f(\omega)$ vor.

In ähnlicher Weise verfährt man mit der Discriminante Δ, welche eine Modulform der ersten Stufe und, wie aus der Darstellung

$$\Delta = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} r \prod (1 - r^m)^{24}$$

hervorgeht, der -12ten Dimension ist. Man betrachtet nämlich die Modulformen $\Delta, \sqrt[2]{\Delta}, \sqrt[3]{\Delta}, \sqrt[4]{\Delta}, \sqrt[6]{\Delta}, \sqrt[12]{\Delta}$ von der Dimension $-12, -6, -4, -3, -2, -1$ und der Stufe $1, 2, 3, 4, 6, 12$.–

6. Wir suchen uns von dem der Bildung dieser Ausdrücke zu Grunde liegenden Princip, soweit es in Kürze geschehen kann, Rechenschaft zu geben. Dass man zunächst bei Δ mit dem Wurzelzeichen nur bis $\sqrt[2]{\Delta}$ gehen darf,

sofern man eindeutige Funktionen von ω_1, ω_2 erhalten will, ist klar, da ja $\sqrt[12]{\Delta}$ bereits von der Dimension -1 ist. Daß man aber wirklich so weit gehen darf, ohne daß man zu vieldeutigen Funktionen kommt, ergiebt sich aus der vorstehenden Productdarstellung von Δ, die doch für den ganzen in Betracht kommenden Bereich $|r| < 1$ convergirt. Wir können hier nämlich die 2te, 3te, 4te, 6te, 12te Wurzel teils in rationaler Form, teils bei dem Factor r in transcendenter Form ausziehen, indem

$$z.\,B.\quad r^{1/12} = e^{\frac{2i\pi\omega_1}{12\omega_1}} = e^{\frac{i\pi}{6}}$$

eine eindeutige Funktion von ω_1 und ω_2 wird. Was die angegebenen Stufenzahlen betrifft, so müssen wir uns mit einem Hinweise auf die „Modulf." (Bd I. pg. 623) begnügen.

Bei den Ausdrücken in λ liegen die Verhältnisse etwas anders.

Man erkennt nämlich (aus der Dreiecksteilung der w-Ebene) <u>daß jede beliebige Wurzel aus λ eine eindeutige Function von w darstellt.</u> Das gilt insbesondere auch für den $\log \lambda$, den wir ja als eine unendlich hohe Wurzel auffassen können. Wir können daher den Ausdruck $\sqrt[r]{\lambda}$ (r beliebig) als eine Modulfunction bezeichnen. Derselbe stellt aber im Allgemeinen keinen <u>Congruenzmodul</u> dar. Vielmehr beweist man (vergl. Modulf. Bd I. pg. 656) daß wir im Falle $r = 2, 4$ und 8 Congruenzmoduln der oben angegebenen Stufenzahlen erhalten werden. Desgleichen ergibt sich hinsichtlich der Größe $\lambda(\lambda-1)$, daß nur die oben angegebenen Wurzeln Congruenzmoduln liefern.

Noch möge der Zusammenhang von $\sqrt[r]{\lambda}$ und $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1}$ mit der Discriminante Δ angeführt werden. Man findet in dieser Hinsicht (vergl. Modulf. II. pg. 66) die Darstel-

lung:

$$\sqrt[8]{-\lambda} = \sqrt[24]{\frac{\Delta\left(\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right)}{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)}}, \quad \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)} = \sqrt[24]{\frac{16\,\Delta(\omega_1, \omega_2)}{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)}};$$

dieselbe zeigt, daß $\sqrt[8]{-\lambda}$ und $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ auf Wurzeln aus transformirten Δ zurückkommen.

7. Für die hier betrachteten Wurzelfunctionen scheint eine eigene Fermiologie am Platze. Wir sagten, daß $\sqrt[r]{\Delta}$ $(r = 2, 3, 4, 6, 12)$ sich bei den Substitutionen der 1ten Stufe im Allgemeinen verändert und daher einer höheren Stufe angehört. Die Aenderung kann aber nur in dem Hinzutreten von 2., 3., 4., 6., 12ten Einheitswurzeln bestehen. Diese Größen stehen daher mit der 1ten Stufe in einem engeren Zusammenhange als die allgemeinen Modulfunctionen der betr. Stufe. Wir wollen diese Größen <u>der 1ten Stufe adjungirt</u> nennen. Ebenso werden wir die angegebenen Wurzeln aus λ und $\lambda(\lambda-1)$ <u>der</u>

2ten Stufe adjungirt nennen, weil sie bei allen Substitutionen der 2ten Stufe sich nur um Einheitswurzeln verändern. Auch diese Auffassung entspricht der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen, in welcher in der That neben den Functionen, die auf einer Riemann'schen Fläche eindeutig sind, in erster Linie solche vieldeutige Functionen der Fläche betrachtet werden, die sich bei Umläufen um Einheitswurzeln ändern.

Den Schluss dieser Vorlesung mögen einige Bemerkungen zu dem Werke über Modulfunctionen bilden, welche die Stellung der Verfasser zu dem in dem Buche verfolgten Plane wiedergeben.

Das Werk beschäftigt sich ja fast ausschliesslich mit den Modulfunctionen, betrachtet also die elliptischen Functionen durchaus in ihrer Abhängigkeit von den w, während die Abhängigkeit von u

zurückgedrängt wird. Hierin wol-
len Sie nur einen Akt ausgleichen-
der Gerechtigkeit erblicken. Während
nämlich die bisherigen Darstellungen
die Abhängigkeit der elliptischen Funk-
tionen von den Perioden in ungebühr-
licher Weise vernachlässigten, schien
es vorteilhaft, einmal diese Seite der
Theorie vornehmlich hervorzukehren.
Schliesslich muss die allgemeine Auf-
fassung die sein, dass die elliptischen
Funktionen solche dreier Variablen w, ω_1, ω_2
sind, wobei man nun nach Bedürf-
nis bald die eine, bald die ande-
re dieser Variabelen voranstellt.

Eine zweite Bemerkung soll
sich auf die dem Buche zu Grunde lie-
gende Systematik, auf die Eintei-
lung nach Untergruppen und zuge-
hörigen Invarianten, insbesondere
also die Stufeneinteilung be-
ziehen. Diese Systematik hat
gestattet, eine grosse Reihe der
bei den elliptischen Funktionen
hervortretenden Beziehungen un-

ten einheitliche und übersichtliche Gesichtspunkte zu bringen und in der Fülle der Formeln Ordnung zu stiften. Aber die Natur der Dinge ist allemal reicher als jedes noch so vollkommene System. Auch hier bleibt ein Rest von elliptischen Beziehungen übrig, der in das System nicht hinein passen will; nach Aufrichtung des Systems werden gerade diese Beziehungen ein besonderes Interesse beanspruchen. Denn in ihnen liegen die Keime weiterer Entwicklung.

Dies möge nach einer Seite hin näher ausgeführt werden. Wir wollen die Produktformel für die Diskriminante folgendermaßen schreiben:

$$\Delta = \left(\frac{2}{\omega_2}\right)^{12} \varphi(\omega), \quad \varphi(\omega) = x^2 \prod (1-x^m)^{24}$$

und die Funktion $\varphi(\omega)$ in's Auge fassen. Dieselbe ist in unserer Terminologie überhaupt keine Modulfunktion; denn sie ändert

sich bei sämmtlichen Substitutionen der Modulgruppe. Da Δ selbst unverändert bleibt, so haben wir in der That:

$$\varphi\left(\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}\right)=\left(\frac{\gamma w_2+\delta}{\gamma w}\right)^{12}\Delta(w_1,w_2)$$

$$=(\gamma w+\delta)^{12}\cdot\varphi(w).$$

Allgemeiner werden wir nun solche Funktionen in Betracht ziehen, welche sich bei unseren Substitutionen um irgend eine Potenz von $\gamma w+\delta$ ändern, wobei wir auch gebrochene Potenzen nicht ausschliessen.

Es fragt sich, dass eine solche Funktion sehr wohl in der Variabeln w eindeutig sein kann, was wir allerdings festhalten wollen. Sei nämlich

$$\Phi_r(w)=\sqrt[r]{\varphi(w)}=x^{\frac{1}{r}}\prod(1-x^m)^{\frac{24}{r}}=e^{\frac{2i\pi w}{r}}\cdot\prod(1-x^m)^{\frac{24}{r}}$$

Hier können wir jeden Faktor des Produktes nach dem Binom entwickeln und dann das ganze

Product in eine Potenzreihe nach r ordnen, die für $|r| < 1$ convergirt und also eine in der positiven w-Halbebene eindeutige Function ergibt. Während wir von dem früheren Standpunkte aus bei Δ nur die Wurzeln $r = 2, 3, 4, 6, 12$ zuliessen, kann r jetzt jede Zahl bedeuten. Die neue Function $\Phi_r(\omega)$ genügt der Functionalgleichung:

$$\Phi_r\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = (\gamma\omega+\delta)^{\frac{12}{r}}\,\Phi_r(\omega).$$

Wir sehen uns durch diese Gleichung vor ein merkwürdiges Problem gestellt. Wie soeben gezeigt wurde, haben nämlich die Ausdrücke Φ_r ganz bestimmte eindeutige Werte. Daher muss auch der an sich im Allgemeinen r-wertige Ausdruck $(\gamma\omega+\delta)^{\frac{12}{r}}$ in unserer Gleichung eine eindeutig-bestimmte Bedeutung haben. Es gilt also, aus den sämmtlichen möglichen Werten dieses Ausdrucks in jedem

Falle denjenigen auszusondern, der in der vorliegenden Gleichung gemeint ist. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir jeder Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ eine Einheitswurzel zuordnen, also auf eine durchaus zahlentheoretische Frage.

In dem Werke über Modulf. ist diese Frage bei Seite gelassen; dagegen spielt sie anderweitig in der Literatur eine wichtige Rolle nämlich im Falle $r = 8$ in der Theorie der ϑ-Functionen und im Falle $r = 24$ in den Arbeiten von Dedekind und Weber, wo die betr. Function $\sqrt[24]{\varphi(\omega)}$ mit $\eta(\omega)$ bezeichnet wird.

Nehmen wir geradezu $\nu = \infty$, so tritt $\lg \varphi(\omega)$ als eine wichtige Modulfunction im erweiterten Sinne in die Betrachtung ein; auch sie ist in ω eindeutig. Die Functionalgleichung

$$\lg \varphi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = 12 \lg(\gamma\omega+\delta) + \lg \varphi(\omega)$$

setzt wieder eine an sich vielden

tige (u. zw. hier unendlich vieldeuti-
ge) Funktion mit eindeutigen Funk-
tionen in Beziehung. Es entsteht also
die interessante Frage, nach welchem
Gesetz aus den unendlich vielen Wer-
ten der Logarithmus derjenige ausge-
sucht werden muß, welcher der vor-
stehenden Gleichung genügt.

In der Literatur tritt die Funktion
$\lg \varphi(w)$ beispielsweise in der
Kronecker'schen Grenzformel auf,
welche wir im Sommer kennen
lernen werden.

Hiermit schließen wir unsere Kur-
ze Digression über die elliptischen
Funktionen, bez. elliptischen Modul-
funktionen. Wir haben ja nichts Voll-
ständiges geben können. Aber viel-
leicht sind unsere Bemerkungen
doch geeignet, soweit in die Theorie
einzuführen, daß die erste
Schwierigkeit, welche der ausge-
dehnt weitschichtige Stoff darzu-
bieten pflegt, überwunden ist.

An Ihnen wird es nun sein, wäh-
rend der Osterferien den so genommenen
Ansatz durch speciellere Studien zu
entwickeln. In der That werden wir
im Sommersemester gar nichts
machen können, wenn es uns nicht
gestattet sein soll, hier und dort
auf die Theorie der elliptischen
Functionen zu recurriren.

Einleitung.

Do. 23. 4. 96. Unsere Hauptaufgabe im kommenden Semester wird es sein, den wunderbaren Zusammenhange nachzugehen, welcher zwischen der Theorie der definiten binären quadratischen Formen und der Theorie der elliptischen Functionen besteht. Der Zusammenhang wird unmittelbar verdeutlicht durch die gemeinsame geometrische Vorstellung des Gitters, welche wir in dem ersten Theile dieser Vorlesung der Behandlung der quadratischen Formen zu Grunde legten und welche sich beim Studium der elliptischen Functionen von selbst darbietet. Indem wir bei unserem Gitter die Punkte und nicht die verbindenden Geraden als das wesentliche ansahen, kamen wir dazu, in der Zahlentheorie das Aequivalenzproblem voranzustellen und alle diejenigen Formen als gleichwertig in eine Klasse zusammenzufassen, welche zu demselben Punktgitter gehö-

ren. In der Functionentheorie entspricht diesem Standpunkte, dass wir die elliptischen Functionen nicht allein durch die Periodicität in der Variabelen zu definiren, sondern dass wir auch ihre Abhängigkeit von den Perioden ω_1, ω_2 betrachten und sie durch ihr Verhalten gegenüber den linearen Periodentransformationen

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

charakterisiren. Die elliptischen Functionen sind hiernach Functionen dreier Variabeln zz, ω_1, ω_2, welche durch gewisse <u>Invariantencigenschaften</u> ausgezeichnet sind.

Wir sehen uns jedoch gezwungen, in der Folge noch einen Schritt weiter zu gehen; wir werden nur solche elliptische Functionen untersuchen, in denen z überhaupt nicht vorkommt, werden uns also auf <u>elliptische Modulfunctionen</u> beschränken. Wir haben schon gegen Ende des vorigen

Semesters betont, daß wir diese Beschränkung, welche ja auch in den „Vorlesungen über Modulfunctionen" zu Grunde liegt, an sich durchaus nicht für wünschenswert halten. Sie bringt es mit sich, daß sehr interessante Abschnitte der Theorie, so die Teilung der elliptischen Functionen, die allgemeine Transformationstheorie, nicht zur Sprache kommen werden. Indessen ist bei der Kürze der Zeit eine gewisse Auswahl der Stoffes durchaus geboten. Alles dieses wurde schon zum Schlusse des vorigen Semesters in seinen allgemeinsten Umrissen erläutert, und es wurde auch schon betont, nach welcher Seite sich das besondere Interesse wendet. Die Sache ist folgende:

In der Zahlentheorie ist man gewohnt, die Coefficienten der quadratischen Form als ganzzahlig voraus zuzetzen; gerade die wichtigsten Resultate der Theorie beziehen sich auf diesen Fall. Dementsprechend

werden wir unter den elliptischen Gebilden insbesondere solche betrachten, welche zu ganzzahligen quadratischen Formen gehören, in dem Sinne, daß die Norm der allgemeinsten Periode des Gebildes

$$(\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$$

gleich einer Form

$$a x^2 + b x y + c y^2$$

mit ganzzahligen Coefficienten wird. Diese Gebilde nennt man nach dem Vorgange von Kronecker singuläre elliptische Gebilde. Es wird sich für uns darum handeln, die besonderen Eigenschaften kennen zu lernen, welche die singulären elliptischen Gebilde gegenüber der Periodentransformation n^{ter} Ordnung.

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= A\omega_1 + B\omega_2 \\ \Omega_2 &= C\omega_1 + D\omega_2 \end{aligned}\right\} AD - BC = n$$

aufweisen. Man bezeichnet diesen Gegenstand gewöhnlich kurzweg als die complexe Multiplication

der elliptischen Functionen. Die Bezeichnung rührt daher, dass unter den genannten Transformationen solche vorhanden sind, welche in einer Multiplication der Perioden mit einer complexen Zahl bestehen und dass diese besondere Transformation durch die Abhandlungen von Abel zuerst bekannt geworden ist.

Die Lehre von der complexen Multiplication bildet nach der allgemeinen Ansicht der Mathematiker einen der schönsten und zugleich einen der schwierigsten Theile unserer Wissenschaft. So konnte Camille Jordan in der Einleitung zu seinem Traité des Substitutions die von Kronecker aufgestellten Theoreme „l'envie et le désespoir des géomètres" nennen. Ich hoffe, Ihnen zeigen zu können, dass infolge der in der Neuzeit erreichten Fortschritte keine eigentliche Schwierigkeit mehr mit dem Gegenstande verbunden ist, man vielmehr die

Hauptheoreme durchaus auf einfachem Wege einsehen kann.

Frei. 24.4.96. Bereits im vorigen Semester haben wir von der Stufeneintheilung der elliptischen Modulfunctionen gesprochen. Wir bezeichneten als Functionen der ersten Stufe solche Moduln, welche, wie die Function $J(\omega)$, bei der Gesammtgruppe der linearen Periodentransformationen in sich übergehen. Neben der Gesammtgruppe werden insbesondere diejenigen Untergruppen in Betracht gezogen und als Hauptcongruenzgruppen N^{ter} Stufe bezeichnet, deren Substitutionen modulo einer gegebenen Zahl n der Identität congruent sind.

Für die Hauptcongruenzgruppe der 2ten Stufe haben wir den Discontinuitätsbereich schon früher bestimmt. Er bestand aus dem Sechsfachen des Discontinuitäts-bereiches

der Gesammtgruppe, entsprechend dem Umstande, dass der Index dieser Untergruppe gleich 6 ist. Für dem Doppelverhältnisse λ der Verzweigungspunkte des gewöhnlichen elliptischen Integrals erkannten wir einen Hauptmodul zweiter Stufe, d. h. eine Modulfunction, welche in dem genannten Bereiche jeden Wert einmal und nur einmal annimmt. Eine unmittelbare Folge dieser Eigenschaft ist, dass die Gleichung

$$w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \pmod 2$$

die andere Gleichung

$$\lambda(w') = \lambda(w)$$

nach sich zieht, und dass umgekehrt diese Gleichung das Bestehen jener bedingt. Jede andere Function derselben Fundamentalbereiches wird eine rationale Function von λ, insbesondere ist J eine rationale Function 6ten Grades.

des: $J(\omega) = R_6(\lambda)$. Die Existenz einer Hauptmoduln zeigt an, dass der Fun. damentalbereich zweiter Stufe vom Geschlechte 0 ist, d. h., dass er bei der durch die Kantenzuordnung angezeigten Zusammenbiegung in eine geschlossene Fläche vom Geschlechte 0 übergeht. Es hat dies insbesondere zur Folge, dass die 6 Werthe von λ, welche zu dem nämlichen Werthe von J gehören, linear untereinander zusammenhängen. Wegen des Beweises aller dieser Behauptungen vergl. Modulf. I pag. 270 u. f.f., sowie die Figur von pg. 72.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Hauptstrongruenzgruppen 3ter, 4ter und 5ter Stufe. Auch hier ist das Geschlecht der Discontinuitätsbereiche gleich 0, dagegen wird es für die höheren Stufen grösser als 0. Dementsprechend gibt es einen Hauptmodul 3ter, 4ter und 5ter Stufe; derselbe wird mit $\xi(\omega)$, $\eta(\omega)$, $\zeta(\omega)$ bezeichnet und bez. Tetraëder-

Oktaëder - , Ikosaëder - Irrationalität

genannt. Die Benennung gründet sich darauf, dass die betr. Discontinuitäts bereiche auf dieselbe Weise in Discontinuitätsbereiche der Gesamtgruppe zerfallen, wie die Kugel bei den Gebietseinteilungen der regulären Körper. In demselben Sinne gehört der Modul λ zum „Dieder" $n = 3$. Man vergleiche hierzu „Modulf" I pg 354, 355, 356, wo die Figuren in der w-Ebene, und pg. 104, 76, 106, wie die entsprechenden Figuren auf der Kugel dargestellt sind. Die Zerlegung der Discontinuitätsbereiche in Unterbereiche geht Hand in Hand mit der algebraischen Abhängigkeit der Moduln höherer Stufe von dem Modul J. Wir wollen die Beziehung für die 5te Stufe explicite angeben. Der zugehörige Disc. besteht aus 60 Disc. der Gesammtgruppe, daher wird J eine rationale Function 60ten Grades von λ. Wir schreiben dieselbe in der Ge-

„stalt einer fortlaufenden Proportion folgendermaßen an:

$$\mathcal{F} : (\mathcal{F} - 1) : 1 = \left[-\xi^{20} - 1 + 228(\xi^{15} - \xi^{5}) - 494\xi^{20}\right]$$
$$: -\left[\xi^{30} + 1 + 522(\xi^{25} - \xi^{5}) - 1005(\xi^{20} + \xi^{10})\right.$$
$$: 1728\,\xi^{5}(\xi^{10} + 11\xi^{5} - 1)^{5}.$$

Vergl. hierzu „Modulf." I pg. 105 und II pg. 383.

Die vorstehende Gleichung heisst die Ikosaëdergleichung; sie definirt ξ als algebraische Function von J.

Wir werden von der Ikosaëderirra„tionalität im Folgenden einen conse„quenten Gebrauch machen. Es zeigt sich ohnehin, dass man in der Transforma„tionstheorie bei den Moduln der 1ten Stufe nicht stehen bleiben kann. In der vorhande„nen Literaratur kommt bereits häufig das Doppelverhältnis λ, dann $\sqrt[8]{\lambda}$, $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ etc. vor. Demgegenüber werden wir durch„gehends die Ikosaëderirrationalität bevorzugen.

Wir haben in der Einleitung betont, dass der zahlentheoretische Aequi„valenzbegriff der Invarianten„

genschaft der elliptischen Funktionen genau entspricht. Dies trifft jedoch zunächst nur hinsichtlich der Modulfunktionen 1ter Stufe zu. Um auch die Modulfunktionen höherer Stufen für die Zahlentheorie fruchtbar zu machen, müssen wir den Aequivalenzbegriff verfeinern. Neben der Aequivalenz schlechtweg werden wir die relative Aequivalenz modulo n stellen, indem wir die zu betrachtenden Substitutionen, welche die eine Form in die andere überführen sollen, auf die Hauptkongruenzgruppe n=ter Stufe beschränken. Es entsteht insbesondere die Frage: Wann sind zwei quadratische Formen negativer Diskriminante in diesem Sinne relativ aequivalent?

Die Beantwortung dieser Frage ist in unseren Modulfiguren der w-Ebene vollständig enthalten. In der That geben dieselben in allen Fällen ein geeignetes „Reduktionsverfahren" zur Entscheidung der Aequi-

valenz. Die einzelne Form wird in der w-Ebene durch dasjenige Paar conjugirter Punkte dargestellt, für welches $a w^2 + b w + c$ verschwindet. Handelt es sich um die gewöhnliche Aequivalenz, so giebt es eine und nur eine Substitution der Gesammtgruppe, welche einen Punkt des Paares in den Ausgangsraum der Dreiecktheilung überführt. Zwei Formen waren nun aequivalent, wenn sie bei der hier durch definirten Reduction denselben Punkt des reducirten Raumes ergaben. In ganz entsprechender Weise werden wir verfahren, wenn nach der relativen Aequivalenz zweier Formen gefragt ist. Wir dürfen dann bei der Reduction nur die Substitutionen der betr. Untergruppe benutzen. Durch diese gelingt es jedesmal in eindeutiger Weise, die repraesentirenden Punkte der gegebenen Formen in den zu der betr. Hauptcongruenzgruppe gehörigen reducirten Discontinui-

tätsbereiche zu bringen. Fallen dabei die repräsentirenden Punkte zusammen, so sind die Formen relativ aequivalent, im anderen Falle sind sie es nicht. Um die Reduction wirklich auszuführen, haben wir die erzeugenden Operationen der Untergruppe nach einem bestimmten Gesetze zu combiniren. Diese erzeugenden Substitutionen sind keine anderen, als diejenigen, welche die Kanten des reducirten Discontinuitätsbereiches zusammenordnen.

30. 4. 96. Wir erwähnten neben den Modulfunctionen der niedersten Stufe in der letzten Stunde des vorigen Semesters bereits einige Modulfunctionen höherer Stufen, welche zu denen der niedersten Stufen in einem einfachen algebraischen Verhältnis stehen. Besonders wichtig ist in dieser Hinsicht die in ω_1, ω_2 eindeutige Function:

$$\sqrt[12]{\Delta},$$

welche wir, da Δ von der ersten Stufe ist, also <u>der ersten Stufe adjun-</u>

girt bezeichneten. In demselben Sinne sind der zweiten Stufe adjungirt bei. spielsweise:

$$\sqrt[8]{\lambda}\,, \qquad \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}\,;$$

Eine directe Untersuchung von $\sqrt[12]{\Delta}$ fin. det man bei Hurwitz: Math. Ann. Bd. 18. Vergl. auch Modulf. I. pg. 623.

Wichtig ist für uns u. a. dass $\sqrt[2]{\Delta}$ in der sog. „Kronecker'schen Grenzformel" auftritt. Ich kann auch über diesen interessanten Gegenstand hier nur ganz kurz referiren. Kronecker knüpft an die Untersuchungen von Dirichlet zur Bestimmung der Klassenanzahl an, welche in der Zahlentheorie von Dirichlet, Dedekind, Cap V, dargestellt sind. Das Charakteristische der Dirichlet'schen Untersuchungen ist das Hereinspielen der unendlichen Reihen in die Zahlentheorie. Dirichlet betrachtet bei gegebener quadratischer Form $ax^2 + bxy + cy^2$ die Reihe

$$\sum \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varrho}},$$

in welcher sich die Summation über alle ganzen Zahlen x und y erstreckt, mit Ausnahme des Wertepaares $x=0$, $y=0$. Die Zahl ϱ muß größer als Null genommen werden, damit die Reihe convergirt. In unserer Ausdrucksweise bedeutet die Reihe nichts Anderes als

$$\sum \frac{1}{(r^2)^{1+\varrho}},$$

wo r die Entfernung der Gitterpunkte von 0 ist und wo über alle Gitterpunkte summirt wird. Dirichlet geht dann zum Limes $\varrho=0$ über und zeigt, daß

$$\lim_{\varrho=0} \varrho \sum \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varrho}} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}$$

Als Function von ϱ aufgefaßt, besitzt also die Dirichlet'sche Reihe für $\varrho=0$ einen einfachen Pol.

Die Leistung von Kronecker besteht nun darin, daß er in der Entwicke-

lung der Reihe nach Potenzen von ϱ das nächst folgende Glied bestimmte. Es ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\sum\frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varrho}}=\frac{1}{\varrho}+\left(C-lg\left\{(\omega_1\bar\omega_2-\omega_2\bar\omega_1)\sqrt[12]{\Delta\bar\Delta}\right\}\right)$$

wo C eine numerische Constante ist.*) Dieser ist die Kronecker'sche Grenzformel.

Wir fassen dieselbe hier auf als eine Methode zur Berechnung von $\sqrt[12]{\Delta}$ und schreiben dementsprechend

$$log\left\{(\omega_1\bar\omega_2-\omega_2\bar\omega_1)\sqrt[12]{\Delta\bar\Delta}\right\}=$$

$$=C+\frac{1}{\varrho}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\left(\sum\frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varrho}}\right)_{lim\,\varrho=0}$$

Merkwürdiger Weise erscheint hier nicht die Function $\sqrt[12]{\Delta}$, sondern ihre Norm in eine Reihe entwickelt, im Gegensatz zu allen sonst bekannten Reihen der Functionstheorie. Ebenso können wir die rechte Seite als ein Aggregat von Normen auffassen, da nämlich

*) Hier ist natürlich $(\omega_1\bar\omega_2-\omega_2\bar\omega_1)=\sqrt{\Delta}$.

$$a x^2 + b x y + c y^2 = |w_1 x + w_2 y|.$$

Wir kommen also in diesen modernsten Gebieten der Functionentheorie auf die Entwickelung einer Norm, welche nach Functionen von Normen fortschreitet, auf eine Reihe von Functionen re„ eller Variablen.'

Die Kronecker'schen Arbeiten befinden sich an verschiedenen Stellen vergl. insbesondere den Beweis der fortlaufenden Artikelreihe über elliptische Functionen, in den Sitzungsberichten d. Berliner Academie, 1883 No. 1–5 und 1885 No. 6–10. Weber behandelt die Kronecker'sche Grenzformel in § 113 seiner elliptischen Functionen.

Erster Hauptteil

Nach dieser einleitenden Uebersicht handeln wir nun ausführlich von der

Transformation höherer Ordnung

der Gitter und der mit ihr parallel laufenden Transformation höherer Ordnung der elliptischen Funktionen.

Vorab bemerken wir, dass der Standpunkt, auf dem wir uns mit den Gittern befassen, der umfassendere ist und eine allgemeine Bedeutung für die Zahlentheorie besitzt, und dass die Beziehung zu den elliptischen Funktionen erst dann zu Stande kommt, wenn wir dem Gitter speziell eine definite Form (eine elliptische Maassbestimmung) zuordnen. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die späteren Auseinandersetzungen

dieser Vorlesung.

Unter einer Transformation n^{ter} Ordnung verstehen wir Folgender: Wir setzen

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_1 &= a\,\omega_1 + b\,\omega_2 \\ \Omega_2 &= c\,\omega_1 + d\,\omega_2 \end{aligned} \right\} \quad a\,d - b\,c = n > 1.$$

Hier bedeuten ω_1, ω_2 die Gitterzahlen (im Besonderen die gewöhnlichen complexen Zahlen), welche zu den dem Anfangspunkte anliegenden Eckpunkten irgend eines Parallelogramms gehören, welches wir dem ursprünglichen Gitter als Elementarparallelogramm einzeichnen können. Gleichzeitig werden Ω_1, Ω_2 die Gitterzahlen, welche in demselben Sinne zu den Eckpunkten eines neuen Gitters gehören. Von demselben sagen wir, dass es dem ursprünglichen Gitter eingelagert ist

Die vorstehenden Formeln zeigen, dass nicht alle Ecken des alten Gitters in dem neuen Gitter vorkommen. Das eingelagerte Gitter besitzt also,

wie schon durch seine Benennung angezeigt wird, gröfsere Maschen als das ursprüngliche. Man berechnet leicht, dafs das neue Elementarparallelogramm n - mal so grofs ist, wie das ursprüngliche.

Statt von den Gittern können wir natürlich auch von den quadratischen Formen sprechen. So geschieht es bei Gauss. Gauss betrachtet neben der Form

$$f = a'x^2 + b'xy + c'y^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$$

die andere

$$F = A'X^2 + B'XY + C'Y^2 = (\Omega_1 X + \Omega_2 Y)(\bar{\Omega}_1 X + \bar{\Omega}_2 Y),$$

in welcher die Ω mit den ω durch die Substitution 1) zusammenhängen. In Folge dessen haben wir:

$$F = (\omega_1(aX + cY) + \omega_2(bX + dY))(\bar{\omega}_1(aX + cY) + \bar{\omega}_2(cX + d$$

Dies ist aber nichts Anderes, als der vorstehende Ausdruck für f, falls wir eintragen:

$$2) \quad \begin{cases} x = aX + cY \\ y = bX + dY \end{cases}$$

Hiernach können wir sagen: Es entsteht F aus f, wenn wir die Größen x und y durch die Transformation 2) von der Determinante n substituiren und nach Potenzen der Größen X und Y ordnen.

Eine in solcher Weise abgeleitete Form F nennt Gauss „<u>in f enthalten</u>". Diese Bezeichnung entspricht unserer Ausdrucksweise von dem „eingelagerten Gitter". Hinsichtlich der Discriminante ergibt sich

$$D_F = n^2 . D_f .$$

Diese Gleichung kommt auf unsere obige Angabe über den Flächeninhalt der Elementarparallelogramme hinaus.

Wir werden unsererseits aber hier wie auch sonst lieber bei den Gittern bleiben. Der Uebergang

zu den Formen würde bedeuten, dass wir die einzelne Gitterzahl jedesmal mit einem Factor, der conjugirten Gitterzahl, multipliziren. Dadurch würden wir die Betrachtung unnötig beschwerlich machen.

Wir geben zunächst eine <u>Einteilung unserer Transformationen nach der Größe des gemeinsamen Teilers</u>, welcher in den Coefficienten der Gleichung 1) enthalten ist.

Ein besonders einfacher Fall ist der, wo nach Absonderung des gemeinsamen Teilers die Determinante der Coefficienten gleich 1 wird. In diesem Falle können wir (ev. durch Übergang zu einem aequivalenten Periodenpaar ω, ω_2) der Transformation die Form geben:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= m\,\omega_1 \\ \Omega_2 &= m\,\omega_2 \end{aligned}\right| \quad n = m^2$$

Wir haben dann die <u>gewöhnliche Multiplication</u> vor uns.

Das entgegengesetzte Extrem findet

statt, wenn die Coefficienten a, b, c, d überhaupt keinen gemeinsamen Teiler haben. Wir sprechen dann von einer <u>eigentlichen Transformation</u> n^{ter} Ordnung.

Zwischen diesen äußersten Fällen giebt es Zwischenstufen, welche man als <u>gemischte Transformationen</u> bezeichnen kann. Hierunter verstehen wir, unter τ einen quadratischen Teiler von n verstanden, Transformationen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= \tau(a'\omega_1 + b'\omega_2) \\ \Omega_2 &= \tau(c'\omega_1 + d'\omega_2) \end{aligned}\right| \; n = \tau^2(a'd' - b'c'),$$

wo nun a', b', c', d' teilerfremd sein sollen.

Sodann beschäftigen wir uns mit der Frage:

<u>Wie viel verschiedene Gitter gibt es, welche durch Transformation n^{ter} Ordnung einem gegebenen Gitter eingelagert werden können?</u>

Die Antwort lautet verschieden, je nachdem wir nach Parallelgittern oder nach Punktgittern fragen.

Parallelgitter gibt es natürlich in unendlicher Anzahl. Um sie aufzustellen, brauchen wir nur die Diophantische Gleichung

$$a d - b c = n$$

in allgemeinster Weise zu lösen, welche unendlich viele Wurzeln hat. Um die Anzahl der Punktgitter zu finden, gehen wir von irgend einem Parallelgitter, d. h. von irgend einem Lösungssystem a, b, c, d aus. Auf dieses wenden wir eine Transformation erster Ordnung an, wodurch das Punktgitter nicht verändert wird. — Wir setzen also:

$$\mathfrak{R}_1' = \alpha \mathfrak{R}_1 + \beta \mathfrak{R}_2 = (\alpha a + \beta c)\omega_1 + (\alpha b + \beta d)\omega_2$$

$$\mathfrak{R}_2' = \gamma \mathfrak{R}_1 + \delta \mathfrak{R}_2 = (\gamma a + \delta c)\omega_1 + (\gamma b + \delta d)\omega_2$$

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 1.$$

Wir wollen nun diese $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dazu benutzen, um die Coefficienten der letzten Glieder möglichst zu vereinfa-

linen; oder anders ausgedrückt, wir wollen unter der Schaar der aequivalenten Gitter ein bestimmtes auszeichnen von besonders einfacher Gestalt. Dieser nennen wir den <u>Repraesentanten</u> der Klasse. Wir haben dann, um die Anzahl der verschiedenen Punktgitter zu finden, nur nötig die Repraesentanten abzuzählen. Ueber die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verfügen wir folgendermaßen. Wir bestimmen γ und δ aus der Gleichung

$$\gamma a + \delta c = 0$$

als teilerfremde Zahlen. Es ist dann immer möglich, Zahlen α und β zu finden, so daß

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

wird. Unsere Transformation lautet jetzt:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{R}_1' = A\,\omega_1 + B\,\omega_2 \\ \mathfrak{R}_2' \qquad\quad \Gamma\,\omega_2 \end{array}\right| \; A\Gamma = n.$$

Dasselbe Verfahren wenden wir von Neuem an, indem wir $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_2'$ linear

substituiren. Dadurch können wir zu nächst erreichen, dass A und D positiv werden. Da nämlich $n > 0$, so haben A und D dasselbe Vorzeichen. Ist dieses negativ, so gehen wir zu $-R_1'$, $-R_2$ über, was einer Transformation erster Ordnung entspricht. Dabei wird das Vorzeichen von A und D' umgekehrt. Ferner können wir erreichen, dass

$$0 \leq B < D'$$

wird. Durch die Transformation

$$R_1'' = R_1 + \beta R_2$$

$$R_2'' = R_2$$

welche gleichfalls die Determinante 1 hat, verwandelt sich nämlich B in $B + \beta D$; durch geeignete Wahl von β können wir also der angegebenen Bedingung genüge leisten.

Hiernach verstehen wir unter dem „Repraesentanten" dasjenige Parallelgitter, welches aus dem ursprüng-

lichen durch die repraesentirende Transformation

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= A\omega_1 + B\omega_2 \\ \Omega_2 &= \qquad\quad D\omega_2 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad AD = n,\ A > 0,\ 0 \leqq B < D \quad D > 0$$

hervorgeht. Die vorstehende Betrachtung zeigte, daß unter der Schaar aequivalenter Gitter mindestens ein Repraesentant dieser Art vorhanden ist. Daß es auch nur einen solchen geben kann, folgt ebenso leicht. Durch eine Transformation erster Ordnung geht nämlich Ω_1, Ω_2 über in

$$\Omega_1' = \alpha A\omega_1 + (\alpha B + \beta D)\omega_2$$

$$\Omega_2' = \gamma A\omega_1 + (\gamma B + \delta D)\omega_2$$

Soll hierdurch wieder ein Repraesentant gegeben sein, so muß $\gamma = 0$ sein; ferner wird, da $\alpha\delta = 1$ und $\alpha A > 0$ sein soll, $\alpha = 1$ und $\delta = 1$. Der Coefficient von ω_2 in der zweiten Gleichung wird daher gleich D; da

außerdem der Coefficient von ω_2 in der ersten Gleichung kleiner als Δ' sein soll, so folgt notwendig $\beta = 0$.

Die vorstehenden Betrachtungen fassen sich in den Satz zusammen: Man bekommt alle eingelagerten Punktgitter und jedes nur einmal, indem man alle Transformationen

$$\Omega_1 = A\omega_1 + B\omega_2$$
$$\Omega_2 = \Delta'\omega_2$$

aufschreibt, in denen A und Δ' positive Zahlen sind, welche n geben, und wo B die Zahlen $0, 1, \ldots \Delta' - 1$ durchläuft.

1. 5. 96. Wir kommen nun zur Abzählung der Repräsentanten. Zunächst sei n eine Primzahl: $n = p$. Dann ist entweder $A = 1$, $\Delta' = p$ oder $A = p$, $\Delta' = 1$. Dementsprechend gibt es die folgenden Transformationen:

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1 &= \omega_1 + B\omega_2\\ \Omega_2 &= p\omega_2\end{aligned}\right\} B = 0, 1, \ldots p-1 \quad \Big| \; p \text{ Transf.}$$

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1 &= p\omega_1 + B\omega_2\\ \Omega_2 &= \omega_2\end{aligned}\right\} B = 0 \quad \Big| \; 1 \text{ "}$$

im Ganzen $p+1$ Transformationen.

Wir nehmen ferner an: $n = p^2$. Wir können dann n auf dreierlei Arten zerlegen und haben:

$A = 1,\ D = p^2,\ B = 0, 1, \ldots p^2 - 1$	p^2 Transf.
$A = p,\ D = p,\ B = 0, 1, \ldots p - 1$	p "
$A = p^2,\ D = 1,\ B = 0$	1 "

im Ganzen $p^2 + p + 1$ Transformationen. Unter diesen befindet sich eine uneigentliche Transformation, welche in der zweiten Reihe vorkommt, nämlich $\Omega_1 = p\omega_1$, $\Omega_2 = p\omega_2$.

Hiernach ist das allgemeine Gesetz klar. Bedeutet n eine beliebige Zahl und $\Phi(n)$ die Teilersumme von n, so ist die Gesammtzahl aller Transformationen von der Ordnung n gleich $\Phi(n)$.

In der That kann D alle Teiler von n durchlaufen; zu jedem Werte von D aber gibt es D Werte von B. Daher haben wir soviel Transformationen n^{ter} Ordnung, als die Summe der Teiler Einheiten enthält.

Unter diesen befinden sich jedoch auch uneigentliche Transformationen.

Die Anzahl der eigentlichen wird, wie wir hier kurz angeben wollen:

$$\psi(n) = n\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\ldots.$$

Dabei wird noch ersichtlich

$$\Phi(n) = \Sigma\,\psi\left(\frac{n}{\tau_2}\right).$$

Wenn wir nämlich n der Reihe nach von seinen quadratischen Teilern (τ) befreien und alle eigentlichen Transformationen von der Ordnung $\frac{n}{\tau^2}$ bilden, so erhalten wir in der Summe alle Transformationen von der Ordnung n.

Nach den vorstehenden Formeln können wir die folgende kleine Tabelle aufstellen:

$n=$	2	3	4	5	6	8	12	
$\psi=$	3	4	6	6	12	12	24	
$\Phi=$	3	4	7	6	12	15	28	

Vom arithmetischen Standpunkte sind die bisher besprochenen Repräsentanten die einfachsten, wir bezeichnen

sie also arithmetische Repräsentanten

Für die Zwecke der Funktionentheorie nehmen wir aber besser eine kleine Aenderung vor:

Es sei $n = p$. In diesem Falle lassen wir die ersten p der pg. 21 hingeschriebenen Repräsentanten ungeändert. Bei den letzten derselben aber vertauschen wir $\mathfrak{R}_1$ mit $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_2$ mit $\mathfrak{R}_1$, was auf eine Transformation 1ter Ordnung herauskommt, so daß $\mathfrak{R}_1 = -\omega_2$, $\mathfrak{R}_2 = p\omega_1$ wird. Unsere $p+1$ Transformationen sind dadurch auf die gemeinsame Form gebracht:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \\ \mathfrak{R}_2 &= p(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2) \end{aligned}\right| \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Entsprechendes läßt sich allgemein erreichen. Sei n eine beliebige Zahl und $n = \tau^2 n'$. Alsdann kann man die Repräsentanten so umschreiben, daß

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \tau(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \\ \mathfrak{R}_2 &= \tau n'(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2) \end{aligned}\right| \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Die in solcher Weise ausgezählten Transformationen nennen wir die <u>Funktionen theoretischen Repraesentanten</u>. Wir werden dieselben bald benutzen.

Die bisherigen Erörterungen bezogen sich auf ganz beliebige Gitter. Wir gehen nun auf „<u>ganzzahlige Gitter</u>" ein, d. h. auf solche, in denen a, b, c und in's Besondere

$$D = b^2 - 4ac$$

ganze Zahlen sind. Während im allgemeinen Falle jedes Punktgitter für sich dasteht, treten, wie mehrfach betont, die ganzzahligen Gitter von gleicher Discriminante zu einem Organismus zusammen. Wir bezeichnen die Anzahl der Punktgitter gleicher Discriminante mit h oder H, je nachdem wir nur die primitiven, oder überhaupt alle Punktgitter in Rechnung bringen. Dabei besteht ersichtlich die Relation:

$$H(D) = \sum h\left(\frac{D}{\bar{c}^2}\right),$$

unter $\bar{c}$ einen quadratischen Teiler von D verstanden.

Wir können aus jedem dieser Gitter durch Transformation n^{ter} Ordnung $\Phi(n)$ neue Gitter erhalten, welche die Discriminante $n^2 D$ besitzen werden. Die Frage liegt nahe, ob durch Transformation n^{ter} Ordnung überhaupt alle Gitter der Discriminante $n^2 D$ aus den Gittern der Discriminante D erhalten werden. Diese Frage wird durch eine Untersuchung von Lipschitz (vergl. Crelle Bd. 53, 1857) bejaht.

Hiernach können wir bei dem Studium der ganzzahligen Gitter folgendermaßen verfahren: Wir bemerken zunächst, daß jede Discriminante die Form hat: $4\nu+1$ oder 4ν. Solche Discriminanten, welche nicht durch Transformation höherer Ordnung aus kleineren Discriminanten entstehen können, bezeichnen wir nach Weber als Stammdiscriminanten. Hiernach werden Stammdiscriminanten sein Discr. von der Form $4\nu+1$, falls sie ohne quadratischen Teiler

sind und Diskriminanten von der Form 4ν, falls ν keinen quadratischen Teiler enthält und falls nach Fortheben der 4 eine Zahl übrig bleibt, welche keine Diskriminante sein kann, d. h. eine Zahl von der Form $4\nu'+2$ oder $4\nu'+3$. Wir konstruieren jetzt zu allen Stammdiskriminanten die zugehörigen Gitter, welche notwendig sämmtlich primitiv werden, so daß $h = H$ wird. Dies sind unsere „Stammgitter". Zu die Stammgitter lagern durch Transformation n^{ter} Ordnung neue Gitter ein, wobei wir n alle Zahlen 2, 3, 4 ... durchlaufen lassen. Hierdurch kommen wir zu je $P(n)$ „Kreisgittern". Auf diese Weise ergiebt sich eine systematische Aufzählung der ganzzahligen Gitter nach ihrem inneren Zusammenhange.

Wir betrachten nun die funktionentheoretische Seite unserer Pro-

blems. Gegeben sei ein elliptisches Gebilde durch seine Perioden ω_1, ω_2, die Invarianten g_2, g_3 bez. die absolute Invariante J. Wir nehmen eine Transformation n^{ter} Ordnung mit den Perioden vor, durch welche sich g_2, g_3, J in g_2', g_3', J' verwandeln mögen. Es entsteht die Frage, wie diese neuen Größen mit den alten zusammenhängen.

Zunächst handelt es sich um die Funktion $J(\omega)$. Da dieselbe nur von den Periodenquotienten abhängt, so wird dieselbe durch eine bloße Multiplikation der Perioden überhaupt nicht geändert. Aus demselben Grunde haben wir überhaupt nur die eigentlichen Transformationen zu berücksichtigen, indem ein etwaiger gemeinsamer Faktor ε der Transformationsgleichungen für β_1, β_2 im Quotienten von selbst herausfällt. Hiernach giebt es zu jedem Werthe von J für jedes n im Ganzen $\nu(n)$ transformirte Werthe.

$F_1', F_2', \ldots F_{\psi(n)}'$

welche die allgemeine Form haben:

$$F\left(\frac{\alpha w + \beta}{n(\gamma w + \delta)}\right),$$

wo unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Werte dieser Größen aus dem funktionentheor. Repräsentanten zu verstehen sind.

Die Frage ist, wie diese Werte F' mit dem gegebenen F zusammenhängen.

In indirekter Weise kann man natürlich den Zusammenhang dahin definiren: Man suche zu den gegebenen F die zugehörigen Werte des Argumentes w, welche sämmtlich aus einem von ihnen w_0 durch die linearen Substitutionen $w = \frac{\alpha w_0 + \beta}{\gamma w_0 + \delta}$ hervorgehen. Man bilde nun $\frac{w}{n}$ und behalte von den unendlich vielen Werten von $\frac{w}{n}$ nur die nicht-aequivalenten bei. Als solche kann man direct die $\psi(n)$ funktionentheoretischen Repräsentanten wählen. Endlich bestimme man die Werte von F, welche diesen $\psi(n)$ Argumenten entsprechen. So erhält

man die gesuchten Werte J':

$$J' = J\left(\frac{w}{\eta}\right),$$

dies ist natürlich nur eine von $\psi(n)$ verschiedenen Darstellungen.

7. 5. 96. Wir wünschen aber den Zusammenhang in direkterer Form anzugeben, indem wir, ohne auf das Argument w_0 zu recurriren, die Werte J' in ihrer Abhängigkeit von dem gegebenen Werte J darstellen. Zu dieser Hinsicht werden wir den folgenden Satz beweisen, den wir zunächst nur für den Fall, dass der Transformationsgrad eine Primzahl ($n = p$) ist, aussprechen:

<u>J' ist eine $(p+1)$-werthige irreducible algebraische Function von J.</u>

Der Beweis stützt sich auf functionentheoretische Betrachtungen in der w-Ebene. Wir constatiren erstens, dass vermöge der obigen Darstellung $J' = J\left(\frac{w}{\psi}\right)$ eine eindeutige Function von w ist.*)

*) Nimmt man $J'(J)$ in voller Allgemeinheit, indem man von irgend einem zu J gehörigen w zu einem beliebigen $\frac{1}{\eta}\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}$ übergeht, so erhält man $\psi(n)$ getrennte eindeutige Functionen von w nebeneinander.

Wir fragen sodann, bei welchen Substitutionen der $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$-Gruppe unser F' unverändert bleibt. Offenbar bei allen solchen Substitutionen und nur bei solchen, welche für das Argument $\frac{w}{p}$ eine ganzzahlige Substitution von der Determinante 1 oder wie wir kürzer sagen, eine ganzzahlige unimodulare Substitution darstellen. Setzen wir also statt w ein $\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}$, so müssen in

$$\frac{\alpha w+\beta}{p(\gamma w+\delta)} \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha\frac{w}{p}+\frac{\beta}{p}}{p\gamma\frac{w}{p}+\delta}$$

die Coefficienten von $\frac{w}{p}$ ganze Zahlen von der Determinante 1 sein. Hierzu ist, wie man sieht, erforderlich und hinreichend, daß

$$\beta \equiv 0 \pmod{p}$$

wird. Die Substitutionen, welche dieser Bedingung genügen, bilden eine Untergruppe der gesammten $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$-Gruppe, welche, da sie durch eine congruenz definirt ist, als Congruenz-gruppe zu bezeichnen sein wird.

Man erinnere sich jetzt, daß $J(w)$ nur an solchen Stellen der w-Ebene denjenigen Wert annimmt, welche durch eine Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ zusammenhängen. Daraufhin können wir unser Resultat so aussprechen:

Ein und dasselbe Wertepaar (J', J) findet sich in der w-Ebene an solchen und nur an solchen Stellen wieder, welche relativ zu der Congruenzgruppe $\beta \equiv 0 \pmod{p}$ aequivalent sind.

Wir zeichnen sodann den Discontinuitätsbereich unserer Untergruppe. Unter den durch $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ zusammengeordneten Punkten der w-Ebene sind nur diejenigen im Sinne unserer Congruenzgruppe nicht-aequivalent, welche zu verschiedenen Wertenpaaren (J', J) Anlaß geben. Die verschiedenen Werte von J', welche aus einem gegebenen Werte von $J(w_0)$ durch Transformation $p$ter Ordnung entstehen, haben wir oben durch die funktionentheoretischen Repraesentan-

ten charakterisirt. Diese Repraesentanten sind

$$\frac{w_0}{p} \quad \frac{w_0+1}{p} \quad \frac{w_0+2}{p}, \ldots \frac{w_0+p-1}{p}, -\frac{1}{w_0 p}$$

Um eine möglichst symmetrische Gestalt des Discontinuitätsbereiches herauszubekommen, wollen wir dieselben lieber in folgender Weise anordnen:

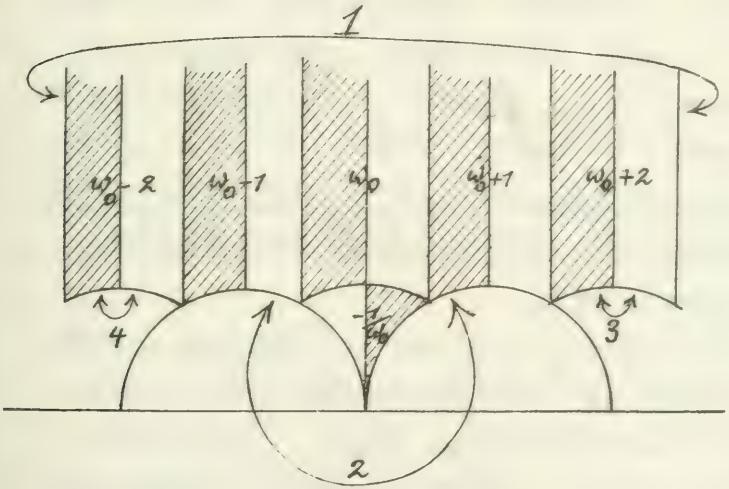
$$\frac{w_0 - \frac{p-1}{2}}{p}, \frac{w_0 - \frac{p-3}{2}}{p}, \ldots \frac{w_0-1}{p}, \frac{w_0}{p}, \frac{w_0+1}{p},$$

$$\frac{w_0 + \frac{p-3}{2}}{p}, \frac{w_0 + \frac{p-1}{2}}{p}, -\frac{1}{p w_0},$$

was offenbar gestattet ist, weil diese Werte den darüberstehenden in Sinne unserer Untergruppe paarweise aequivalent sind.

Wir wollen ferner unter w_0 speciell einen im reducirten Dreieck der w - Ebene gelegenen Wert verstehen. Durchläuft w_0 den ganzen reducirten Raum, so beschreiben gleichzeitig die Größen w_0+1, w_0-1. - $-\frac{1}{w_0}$ je ein anderes Elementardreieck der Modulteil-

lung. Die untenstehende Figur bezieht sich auf den Fall $p = 5$, den wir für das folgende zu Grunde legen wollen. Neben dem reducirten haben wir hier 5 andere Dreiecke, welche bez. die Werte repraesentiren; $\omega_0 + 1$, $\omega_0 - 1$, $\omega_0 + 2$, $\omega_0 - 2$, $-\frac{1}{\omega_0}$. Zu irgend zwei Punkten des so entstehenden Polygones gehören verschiedene Werte von (x, y).



Denn einerseits hat x nur in solchen zweien Punkten unseres Polygones denselben Wert, welche vermöge der Gesammtgruppe aequi-

valent sind. In allen diesen Punkten aber besitzt F' verschiedene Werte, weil dieselben verschiedenen funktionentheoretischen Repraesentanten entsprechen. Daher werden alle Punkte des Polygoninneren im Sinne unserer Untergruppe nicht-aequivalent. Umgekehrt gibt es zu jedem Punkte ausserhalb des Polygons im Innern einen Punkt, in dem sowohl F' wie F dieselben Werte haben, wie in jenem. Daher umfaßt das Polygon auch alle Punkte, welche im Sinne unserer Untergruppe nicht-aequivalent sind. Mit einem Worte: Unser Polygon ist der Discontinuitätsbereich der betrachteten Congruenzgruppe.

Dabei ist noch eine Klausel hinsichtlich der Randpunkte hinzuzufügen. Die Kanten des Polygons sind durch die Substitutionen unserer Untergruppe paarweise einander zugeordnet. Streng genommen dürfen wir daher nur die

Hälfte der Begrenzung unserem Polygone hinzurechnen, während wir die andere Hälfte von der Definition des Discontinuitätsbereiches ausschliessen müssen, wie solches durch stärkeres Ausziehen in der Figur ausgedrückt ist.

Die Substitutionen, welche die Kanten zusammenordnen, sind folgende: Dem Pfeile 1 entspricht offenbar die Substitution:

$$w' = w \pm 5.$$

Der Pfeil 2 bedeutet:

$$-\frac{1}{w'} = \frac{1}{w} \pm 1 \quad \text{oder} \quad w' = \frac{w}{\mp w + 1}$$

Endlich gehören zu dem Pfeile 3 und 4 die folgenden Substitutionen von der Periode 2:

$$w' = \frac{2w - 5}{w - 2}, \quad w' = \frac{-2w - 5}{w + 2}$$

Dass die angegebenen Substitutionen sämmtlich zu unserer Untergruppe gehören, ist klar, dass sie die durch die Figur angegebene Kantenzuordnung bewirken, rechnet man leicht nach.

Diese Substitutionen führen das Polygon je in ein anliegendes re„ lativ - aequivalentes über; bei Wiederholung und Combination derselben wird schliesslich die ganze w-Halbebene mit einem System analoger Polygone überdeckt. Die angegebenen Substitutionen bilden daher die Erzeugenden unserer Untergruppe ei„ ner allgemeinen Regel entsprechend, nach der die Substitutionen, welche die Kanten der Discontinuitätsbereiches zusammenordnen, allemal die erzeugenden Substitutionen der zugehörigen Gruppe darstellen.

Nachdem wir diese gruppentheoretischen Erläuterungen vorangeschickt haben, kommen wir nun zu den specifisch functionentheoretischen Schlüssen, durch welche wir die Abhängigkeit der Werte J' und J bestimmen wollen. Sicherlich ist J' im Falle $p = 5$ eine sechswertige Function von J. Um dieses Abhängigkeitsverhältnis bequem

übersehen zu können, werden wir uns die Z-Ebene mit einer sechsblättrigen Riemann'schen Fläche überdeckt denken.

Jedem Punkte dieser Fläche entspricht ein Wert der Funktionenpaares (Z', Z) und umgekehrt. Andrerseits sahen wir, daß auch jeder Punkt unseres Polygones ein Wertepaar (Z', Z) repräsentiert und umgekehrt jedes Wertepaar (Z', Z) einen Punkt der Polygons bezeichnet. Dabei sind sowohl auf der Riemann'schen Fläche wie in unserm Polygone die Wertepaare (Z', Z) nach dem Gesetz der Stetigkeit ausgebreitet. Infolgedessen sind die Punkte der Riemann'schen Fläche und die Punkte des Polygones eindeutig und stetig aufeinander bezogen. Polygon und Fläche sind, wie man sagt, aufeinander eindeutig abgebildet. Unser Polygon liefert uns einen Fundamen-

talbereich für die Functionen (J', J),
d. h. einen genauen Ersatz der Riemann'schen Fläche. Die sechs Blätter welche bei der Riemann'schen Fläche übereinander liegen, sind in unserem Polygone in übersichtlicher Weise neben einander ausgebreitet; sie entsprechen nämlich einzeln den sechs Elementardreiecken, aus denen sich unser Polygon zusammensetzt. Dabei stellt unser Polygon die geschlossene oder die in zweckmäßiger Weise zerschnittene Riemann'sche Fläche dar, je nachdem wir uns seine Kanten paarweise zusammengeheftet denken oder nicht.

8. V. 96. Wir kommen nun zum Beweise der pg 37 aufgestellten Behauptungen, daß nämlich J' eine irreducible algebraische Function von J ist. Der Zusammenhang zwischen J' und J wird ein irreducibler, wenn die Riemann'sche Fläche aus einem Stücke be-

steht, er wird ein algebraischer, wenn F' auf der Riemann'schen Fläche keine wesentliche Singularität besitzt.

Was nun die Behauptung der Irreducibilität betrifft, so sieht man der Riemann'schen Fläche in der Gestalt unseres Polygones sofort an, dass sie in der That aus einem Stücke besteht. Die Sache würde nur dann anders liegen, wenn unsere Figur aus zwei verschiedenen Theilen bestände, deren Kanten einzeln unter sich zusammengeordnet wären.

Um zweitens zu zeigen, dass auf der Riemann'schen Fläche keine wesentlichen Singularitäten vorkommen, werden wir nach den allgemeinen Regeln der Functionentheorie verfahren, indem wir zeigen, dass für jeden Werth von x F' in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, welche, wenn überhaupt, nur eine endliche Anzahl von negativen Potenzen

von J enthält. Übrigens wollen wir im Folgenden nicht von der Funktion J, sondern von $j = 1728\,J$ sprechen, weil dieselbe in arithmetischer Hinsicht vor J ausgezeichnet ist.

Unser Polygon erstreckt sich nur mit den beiden Zipfeln $w = 0$ und $w = \infty$, bis an die reelle Axe der w-Ebene heran. Sei w_0 zunächst ein Punkt unseres Polygons, welcher von diesen beiden Stellen verschieden ist. Die Function j ist in der Umgebung von w_0 eine analytische Function von w und kann daher in eine Reihe nach ganzen Potenzen von $w - w_0$ entwickelt werden. Umgekehrt läßt sich daher $w - w_0$ durch eine Potenzreihe in $j - j_0$ darstellen ($j_0 = j(w_0)$), in welcher keine negativen Potenzen von $j - j_0$ auftreten. Wir schreiben:

$$w - w_0 = \varphi(j - j_0)$$

In entsprechender Weise können wir aber auch die Function $j - j_0 \left(\frac{w}{\varphi}\right)$ an der Stelle w_0 entwickeln. Da

nämlich der Werth $\frac{\omega_0}{p}$ dem Innern der positiven w-Halbebene angehört, wenn dieser für den Wert w_0 der. Fall ist, so werden wir haben ($f'_0 = f\left(\frac{\omega_0}{p}\right)$):

$$f' - f'_0 = P\left(w - \frac{\omega_0}{p}\right).$$

Hier brauchen wir nur den Ausdruck für w aus der vorletzten Gleichung in die letzte einzutragen, um eine Potenzreihe von der Form

$$f' - f'_0 = P(f - f_0)$$

zu erhalten. in dieser kommen negative Potenzen von $f - f_0$ überhaupt nicht vor. Hierdurch sind diejenigen Punkte unseres Polygons welche im Innern der w-Halbebene liegen, erledigt.

Wir kommen nun zu den Stellen $w = 0$ und $w = \infty$. Hier giebt es natürlich für die Function f keine Potenzentwickelungen in w. Wohl aber haben wir bereits im vorigen Semester Entwickelungen

Räumen gelernt, welche nach der Größe

$$r = e^{2i\pi w}$$

fortschreiten und welche im Punkte $w = \infty$ bei Annäherung in der Richtung der imaginären Axe convergiren. Dieselben lauteten:

$$12 g_2 \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 = 1 + 240 \sum_1^\infty \frac{m^3 r^m}{1 - r^m}$$

$$\Delta \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} = r \prod_1^\infty (1 - r^m)^{24}$$

Hieraus ergibt sich

$$f(w) = \frac{1728 g_2^3}{\Delta} = \frac{1}{r} + p(r),$$

oder wenn wir die numerischen Werte der ersten Coefficienten hersetzen wollen:

$$1)\ f(w) = \frac{1}{r} + 744 + 196884 r + \ldots$$

Die entsprechende Reihe für f' erhalten wir, wenn wir bei unserem Beispiele $p = 5$ bleiben, da

durch, daß wir w mit $\frac{w}{5}$, also r mit $r^{\frac{1}{5}}$ vertauschen. Daher wird

$$1)\quad f'(w)=\frac{1}{r^{\frac{1}{5}}}+744+196884\,r^{\frac{4}{5}}+\ldots.$$

Je nachdem wir $\frac{w}{5}=\frac{w_0}{5}$, $\frac{w_0\pm 1}{5}$, $\frac{w_0\pm 2}{5}$ nehmen, werden hier die fünf verschiedenen Werte von $r^{\frac{1}{5}}$ in Geltung kommen.

Aus dem Punkte $w=\infty$ geht der Punkt $w=0$ hervor, wenn wir $-\frac{1}{w}$ an die Stelle von w treten lassen; dabei geht r über in

$$r'=e^{-\frac{2\pi i}{w}},$$

während f bei dieser Substitution nicht geändert wird. Die zusammengehörigen Reihenentwickelungen im Punkte $w=0$ lauten daher:

$$2)\quad f(w)=\frac{1}{r'}+744+196884\,r'+\ldots.$$

$$2')\quad f'(w)=\frac{1}{r'^5}+744+196884\,r'^4+\cdots$$

Nun können wir aus den Reihen 1) bez. 2) r bez. r' durch eine Reihe darstellen, die nach Potenzen von $\frac{1}{f}$ fortschreitet und positive Exponenten aufweist.

Tragen wir diese Reihen in 1') (bez. 2') ein, so erhalten wir eine Darstellung von j', aus welcher hervorgeht, dass j' auch in den Punkten der Riemann'schen Fläche, welche den Werten $w = \infty$ und $w = 0$ entsprechen, keine wesentliche Singularität besitzt. In Folge dessen hat j' auf der Riemann'schen Fläche überhaupt keinen wesentlich singulären Punkt und stellt in der That eine algebraische Function von j dar.

Das somit abgeleitete Resultat können wir auch folgendermassen formuliren: Wir bilden die sog. „Transformationsgleichung"

$$F(j', j) = (j' - j_1')(j' - j_2') \cdots (j' - j_{p+1}') = 0,$$

von welcher die Bestimmung der zu einem gegebenen j gehörigen transformirten Werte j' abhängt. In ausgerechneter Form lautet sie:

$$j'^{p+1} + a_1 j'^{p} + \cdots a_{p+1} = 0.$$

Hier sind nun die Coefficienten

a als symmetrische Function von $j', \ldots j'^{p+1}$ in j eindeutig; da sie überdies in j algebraisch sind, so werden sie eindeutige algebraische, d. h. rationale Functionen von j. Wir erkennen also, daß für j' eine in j rationale irreducible algebraische Gleichung $p+1^{ten}$ Grades besteht.

Übrigens liefert unsere Schlußweise, welche von den Figuren in der w-Ebene ausging, mehr als die bloße Existenz dieser Transformationsgleichung. Sie gibt gleichzeitig die Verzweigungspunkte der zugehörigen Riemann'schen Fläche an und die Art, wie die Blätter in den Verzweigungspunkten zusammenhängen. Vergl. hierzu Modulf. II pg. 36-62; an gegenwärtiger Stelle können wir dies nicht weiter verfolgen.

Wir betonen, daß wir vorstehend zu der Transformationsgleichung nicht sowohl durch Rechnung als vielmehr durch eine Reihe von Ueberlegungen u. zw. auf directestem Wege gelangt sind.

Gewöhnlich verfährt man weniger direkt, indem man von der Teilungsgleichung der elliptischen Funktionen ausgeht, wobei die Transformationsgleichung als Resolvente der Teilungsgleichung erscheint. Diesen Weg, der übrigens nach anderer Seite Vorteile bietet, konnten wir hier schon deshalb nicht einschlagen, weil wir uns ja ausschließlich auf Modulfunktionen beschränken müssen.

Wir handeln nun speziell von der Gleichung

$$\underline{F(j', j) = 0}$$

und geben in Kürze eine Reihe von Sätzen über die Coefficienten derselben, wobei wir uns an das Buch von Weber: Elliptische Funktionen: (vergl. pg. 250 und ff.) anschließen werden.

1. Die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots$ unserer Gleichung sind nicht nur rationale sondern auch ganze Funktionen von j. Der Grund hier

von liegt darin, daß j' und daher auch die symmetrischen Functionen der verschiedenen j' nur dann unendlich werden können, wenn j selbst unendlich wird, wie aus den Reihen von pg. 51 hervorgeht.

2. Bei einer Vertauschung von j und j' bleibt die linke Seite unserer Gleichung ungeändert. Wir bemerken nämlich, daß die Transformation p^{ter} Ordnung, sofern wir nur die Periodenquotienten w, w' in Betracht ziehen, eine vielvieldeutige Operation ist. Die Beziehung zwischen w und w' können wir unserem $p+1^{\text{ten}}$ Repräsentanten entsprechend allemal auch in der Form

$$w' = \frac{-1}{wp} \quad \text{oder} \quad ww' = \frac{-1}{p}$$

ausdrücken; dabei müssen wir nur w nicht auf den reducirten Raum beschränken, sondern eine geeignete Reihe von $p+1$ Dreiecken durchlaufen lassen. Aus der vorstehenden symmetrischen Schreib-

weise folgt, daß wenn j' aus j durch Transformation p^{ter} Ordnung hervorgeht, auch umgekehrt j aus j' auf dieselbe Weise erzeugt werden kann. Hiernach wird die Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ ungeändert bestehen bleiben, wenn wir j und j' vertauschen. Wir haben daher:

$$F(j', j) = C F(j, j').$$

Durch Wiederholung der Vertauschung $j \sim j'$ kommen wir zu

$$F(j', j) = C^2 F(j', j), \text{ d. h. } C^2 = 1, \quad C = \pm 1.$$

Der Wert $C = -1$ ist auszuschließen, denn er würde zur Folge haben, daß für $j' = j$ $F(j, j) = -F(j, j) = 0$ sein müßte, daß also $F(j', j)$ den Teiler $j' - j$ besäße, was wegen der Irreducibilität von F unmöglich ist. Mithin bleibt nur $C = +1$ übrig, d. h. die linke Seite unserer Gleichung bleibt bei Vertauschung von j und j' gänzlich unge-

ändert.

Man bemerke übrigens, dass die genannte Eigenschaft durchaus an dem Umstande haftet, dass j eine Modulfunction ist und als solche nur von dem Quotienten $\frac{\omega}{\omega_2}$ abhängt. Ueben wir die Transformation p^{ter} Ordnung an den Perioden selbst aus, so haben wir bei Zugrundelegung desselben Repraesentanten, wie oben:

$$\omega_1' = -\omega_2$$
$$\omega_2 = p\,\omega_1 .$$

Diese Operation ist nicht in ω und ω' symmetrisch, sie führt bei Wiederholung daher nicht zur Identität zurück. Vielmehr ergibt sich, wenn wir noch zweitens hinzunehmen:

$$\omega_1'' = -\omega_2'$$
$$\omega_2'' = p\,\omega_1'$$

Zwischen ω'' und ω eine gewöhnliche Multiplication mit $-p$, nämlich

$$\omega_1'' = -p\,\omega_1$$
$$\omega_2'' = -p\,\omega_2 .$$

Hier kommt man also, wie schon Jacobi bemerkt hat, durch Wiederholung der Transformation zu einer Multiplikation.

3. Die numerischen Coefficienten von $f'^{\alpha} f''^{\beta}$ werden sämmtlich ganze Zahlen. Die Anzahl der möglichen numerischen Coefficienten ist von vorneherein begrenzt. Auf Grund des Satzes 2 kann nämlich jeder der Coefficienten a_i höchstens bis zum $p+1$ten Grade in f ansteigen. Man kann daher die Größen a_i mit unbestimmten Coefficienten ansetzen, z. B.

$$a_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11} f + \alpha_{12} f^2 + \dots \alpha_{1\,p+1} f^{p+1},$$

und diese durch Eintragen der Reihenentwickelungen von f' und f'' berechnen. Die Ganzzahligkeit folgt dann aus dem Gesetz der Reihenentwickelungen nach Potenzen von r; die Einzelheiten vergl. bei Weber.

Das einzige ausgerechnete

Beispiel einer Transformationsgleichung verdanken wir Stephen Smith; derselbe berechnete im Falle $p = 3$ die folgende Relation, in welcher zur Abkürzung $f' = 256\,x$, $f = 256\,y$ gesetzt ist:

$$x(x+2^7 3.5^3)^3 + y(y+2^7.3.5^3)^3 - 2^{16}x^3y^3 - 2^{15}.5^6.22973\,xy$$

$$+ 2^4.3^2.31\,x^2y^2(x+y) - 2^2.3^3.9907\,xy(x^2+y^2)$$

$$+ 2.3^4.13.193.6367\,x^2y^2 + 2^8.3^5.5^3.4471\,xy(x+y) = 0.$$

In diesem Beispiel bewähren sich unsere bisherigen allgemeinen Regeln; wir erkennen aber zugleich, daß wir bei größeren Werten des Transformationsgrades zu ganz ungeheuerlichen Relationen geführt werden.

15. V. 96. 4. Die Coefficienten haben aber eine weitere arithmetische Eigenschaft, die wir erwähnen müssen. Man kann nämlich der Transformationsgleichung die Form geben:

$$(j'^p - j)(j^p - j') + \sum_0^p{}^h \sum^K c_{hK}(j'^h j^K + j'^K j^h) + \sum_0^{p-1}{}^h c_{hh} j'^h j^h$$

Hier werden sämmtliche c_{hk} ganze durch p teilbare Zahlen. Der Beweis wird mit Hilfe der oben genannten Reihenentwickelungen von j' nach der Hülfsgröße r geführt. Wir verweisen diesorhalb auf Weber, Ellipt. Fu. pag. 253 – 254.

Wenn man daher die Transformationsgleichung modulo p betrachtet, so reducirt sich ihre linke Seite einfach auf das Product:

$$(j'^p - j)(j^p - j')$$

5. Ist der Grad der Transformation keine Primzahl, sondern eine beliebige zusammengesetzte Zahl, so tritt, was den Grad der Transformationsgleichung betrifft, die zahlentheoretische Function $\psi(n)$ an die Stelle von $p+1$. Im Uebrigen bleiben die sub 2 und 3 genannten Eigenschaften ungeändert bestehen.

Gegenüber dem bisher eingehaltenen Standpunkte, auf welchem wir die Transformationsgleichung voranstellten, gibt es einen höheren Standpunkt, von dem aus man die Gesammtheit der in j und j' rationalen Funktionen in's Auge fasst. Man bezeichnet diese Gesammtheit als den Körper (j', j). Wir werden daher in Zukunft diesen Körper betrachten, aus den Funktionen dieses Körpers die einfachsten aussuchen und deren algebraischen Zusammenhang mit j entwickeln. Hinterher werden wir dann die Größe j' in rationaler Form durch diese einfachsten Funktionen darstellen können.

Der moderne Ausdruck „Funktionenkörper" ist im Grunde identisch mit dem, was man gewöhnlich eine „Riemann'sche Fläche" nennt.

In der That ist die Gesammtheit der Funktionen des Körpers in vorliegenden Falle nichts anderes als die Gesammtheit der auf der Rie-

mann'schen Fläche (j', j) eindeutigen und regulären Funktionen. Die Beziehung auf die Riemann'sche Fläche ist für uns deshalb von Vorteil, weil wir diese in der Gestalt unserer Kreisbogenpolygone bequem übersehen können. Aus diesem Grunde wird auch in dem Buche über Modulf. die Terminologie der Riemann'schen Fläche festgehalten. Der Begriff des Körpers hat aber in anderer Hinsicht seine Vorzüge. Man kann nämlich den Funktionen des Körpers die Bedingung auferlegen, daß sie nur ganzzahlige Coefficienten haben sollen. Diese Verschärfung der Begriffe läßt sich in dem Bilde der Riemann'schen Fläche nicht gut durchführen.

Wir könnten nun, von den niedersten Fällen beginnend, an der Hand unserer Figuren die Funktionen des Körpers (j', j) diskutiren. Statt dessen werden wir hier lieber einen allgemeinen Weg

einschlagen, welcher indirect zu dem oben bezeichneten Ziele führt.

Wir betrachten statt der absoluten Invariante j die Invarianten g_2, g_3, Δ. Bei der Transformation n^{ter} Ordnung mögen diese übergehen in

$$g_2' = g_2(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2), \; g_3', \; \Delta'.$$

Um zu Modulfunctionen zurückzugelangen, bilden wir

$$\frac{g_2'}{g_2}, \quad \frac{g_3'}{g_3}, \quad \frac{\Delta'}{\Delta},$$

welche Ausdrücke ersichtlich nur von dem Quotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ abhängen werden. Es zeigt sich sofort, daß diese Größen ebenso wie j', $V(n)$ verschiedene Werte besitzen, auf der Riemann'schen Fläche eindeutig sind und keine wesentlichen Singularitäten haben. Auf den Beweis gehen wir nicht weiter ein. Wir constatiren aber, daß die genannten Größen in Folge dessen rationale Functionen von j' und j sein

werden und dass sich j' umgekehrt durch j und eine der gesamten Functionen rational darstellen lässt.

Es giebt aber noch <u>einfachere Functionen</u>, als die gesamten, welche gleichfalls unserem Körper angehören, nämlich gewisse Wurzeln derselben. Wir bezeichnen

$$\sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}}$$

mit M (Multiplicator), auf den Grund dieser Benennung kommen wir später zurück. Dass diese Grösse, falls sie unserem Körper angehört, eine einfachere algebraische Function als $\frac{\Delta'}{\Delta}$ ist, ist klar. Denn die algebraische Gleichung, welcher M^{12} genügt und welche aus der algebraischen Gleichung für M leicht abgeleitet werden kann, hat jedenfalls eine complicirtere Gestalt wie die letztere.

Die in jedem Fall zu benutzende einfachste Function, welche noch

in unserem Körper liegt, geben wir in der folgenden Zusammenstellung an. Dabei beschränken wir uns auf solche Transformationsgrade welche nicht durch 2 oder durch 3 teilbar sind. Es geschieht dies, um nicht zu viele Fallunterscheidungen machen zu müssen. Wir haben daraufhin modulo 12 folgende 4 Fälle zu unterscheiden:

$$n \equiv 1 \quad , \quad 5 \quad , \quad 7 \quad , \quad 11 \pmod{12}$$

$$\sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = M \quad , \quad \sqrt[4]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = M^3 \quad , \quad \sqrt[6]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = M^2 \quad , \quad \sqrt[2]{\frac{\Delta'}{\Delta}} =$$

Eine Ausnahme tritt nur der Fall ein, wo n eine Quadratzahl ist. Eine Quadratzahl, welche weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist, muss immer $\equiv 1 \pmod{12}$ sein. Für ein solches n liegt nicht nur die 12te, sondern sogar die 4te Wurzel von $\frac{\Delta'}{\Delta}$ in unserem Körper. Daher wird in diesem

Falle die einfachste Funktion:

$$\sqrt[24]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \sqrt{M}$$

Die angegebene Unterscheidung zwischen den verschiedenen Fällen können wir vermeiden, wenn wir unseren Rationalitätsbereich ein wenig erweitern. Wir wollen nicht nur j, sondern nach Bedarf auch noch die folgenden einfachen algebraischen Funktionen von j als rational bekannt ansehen:

$$f_2 = \sqrt[3]{j} = \frac{12 g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}, \quad f_3 = \sqrt{j - 1728} = \frac{216 g_3}{\sqrt{\Delta}}$$

(in denen natürlich j selbst rational darstellbar ist).

Nach Erweiterung des Rationalitätsbereiches wird sich der Kreis der in unserem Körper befindlichen Funktionen vergrößert haben.

Es zeigt sich, daß nunmehr M

in allen Fällen zu unserem Körper gehört, d. h. einer Gleichung vom Grade $\psi(n)$ mit Coefficienten, die in j, γ_2 und γ_2 rational sind, Genüge leistet.

M. Zw. haben wir zu dem Ende im Falle $n \equiv 5 \pmod{12}$: γ_2, im Falle $n \equiv 7$: γ_3, im Falle $n \equiv 11$ sowohl γ_2 als γ_3 zu dem ursprünglichen Rationalitätsbereich zu adjungiren; im Falle $n \equiv 1$ ist natürlich eine solche Adjunction überflüssig. Es soll daher unser Rationalitätsbereich in den Fällen

$$n \equiv 1,\quad n \equiv 5,\quad n \equiv 7,\quad n \equiv 11 \pmod{12}$$

aus den Functionen bestehen:

$$j,\quad \gamma_2,\quad \gamma_3,\quad \gamma_2\gamma_3$$

Der Vorzug des „Multiplicators" M gegenüber der Größe j besteht in der größeren Einfachheit der algebraischen Gleichung, durch welche M bestimmt wird. Wir nennen diese Gleichung „Multiplicatorgleichung", sie lautet in den niedrigsten Prim-

Zahl-Fällen, soweit sie nicht durch unsere obige Beschränkung ausgeschlossen sind:

$$n=5 \qquad M^6 + 10M^3 - f_2 M + 5 = 0$$

$$n=7 \qquad M^8 + 14M^6 + 63M^4 + 70M^2 + f_3 M - 7 =$$

$$n=11 \qquad M^{12} - 990M^6 + 440 f_2 M^4 - 165M^3 + 22 f_2^2 M$$
$$- f_2 f_3 M - 11 = 0$$

In diesen Gleichungen kommt das, was soeben über den Rationalitätsbereich gesagt ist, zur Geltung. Wir bemerken an ihnen ferner die folgende Regelmäßigkeit, welcher für einen Primzahlgrad $n=p$ allgemein gilt: Alle Coefficienten der Gleichung mit Ausnahme der vorletzten sind durch p teilbar; der letzte Coefficient ist gleich $\pm p$, je nachdem $p \equiv \pm 1 \pmod 4$.

21. V. 96. Historische Notizen über die Multiplicatorgleichung finden sich Modulf. II pg. 80. Wir erwähnen hiervon zunächst, was sich auf

die Bezeichnung „Multiplicator" bezieht. Die Größe M tritt in dieser Hinsicht zum ersten Male auf bei Klein, Math. Ann. Bd. 14, 1878, u. zw. bei der Transformation der elliptischen Integrale in der Weierstrassischen Normalform. Offenbar ist das Weierstrassische Integral

$$\int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$$

homogen von der $+1^{\text{ten}}$ Dimension in ω_1, ω_2. Um es zu einer Größe 0ter Dimension zu machen, kann man $\sqrt{\Delta}$ als Factor hinzufügen. Darauf werden wir es als „normirter Weierstrassischer Integral" bezeichnen.
In der Transformationstheorie vergleicht man nun zwei Weierstrassische Integrale, wobei direct

$$\int \frac{dp'}{\sqrt{4p'^3 - g_2' p' - g_3'}} = \int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$$

Will man aber normirte Integrale betrachten, so wird man die vorher

gehende Gleichung durch die folgende, übrigens genau dasselbe besagende, ersetzen:

$$\int \frac{\sqrt[12]{\Delta'}\, dp'}{\sqrt{4p'^3 - g_2' p' - g_3'}} = \frac{M}{n} \int \frac{\sqrt[12]{\Delta}\, dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$$

Hier sehen wir, spielt die Größe $\frac{M}{n}$ die Rolle eines Multiplikators, sie tritt an die Stelle desjenigen Multiplikators, welcher in der älteren Theorie bei der Transformation der Jacobi'schen Normalintegrale vorkommt.

Die Eigenschaften der Multiplikatorgleichung werden vom Standpunkte der Modulfunktionen, d. h. durch Betrachtungen in der w-Ebene, begründet in der grossen Arbeit von Hurwitz, Math. Ann. Bd. 18, 1881.

Von anderer Seite ist Kiepert zu den Multiplikatorgleichungen gekommen, man vergleiche in's Besondere die zusammenfassende

Arbeit:

Kiepert, Math. Ann. Bd. 26, 1885.

Kiepert geht von dem sog. speciellen Teilungsproblem der elliptischen Funktionen aus. Die Größe M_1 (für welche K. übrigens L^2 sagt) erscheint bei ihm durch die Wurzeln der Teilungsgleichung

$$p\left(\frac{\lambda w_1 + \mu w_2}{n}\right), \quad p'\left(\frac{\lambda w_1 + \mu w_2}{n}\right)$$

ausgedrückt. Die Multiplicatorgleichung wird so zu einer Resolvente der Teilungsgleichung. Unter den reichhaltigen Details der Kiepert'schen Arbeiten heben wir insbesondere hervor, daß hier die Darstellung der Größen g_2', g_3' bez. f' durch M_1, sowie durch die (als rational bekannt anzusehenden) Größen g_2, g_3 bez. f gegeben wird.

Es ist dieser die Ausführung zu einer Bemerkung, welche wir auf pag. 61 machten, wonach man unter den Größen

des Körpers (f', f) möglichst einfache (eben unser M) aufzusuchen und durch diese sowie durch die rational bekannten Grössen alle übrigen darzustellen sollte. Diese Darstellung wird von Kiepert explizite geleistet.

In dem Buche von Weber wird die Gleichung für M als „invariante Multiplikatorgleichung" bezeichnet, weil die Grösse M mit den „Invarianten" g_2, g_3 zusammenhängt. Diese Bezeichnung scheint uns nicht zweckmäßig. Will man die Multiplikatorgleichung für M von anderen Multiplikatorgleichungen, wie solche ja in der Jacobi'schen Theorie vorkommen, unterscheiden, so sollte man sie als Multiplikatorgleichung 1ter Stufe bezeichnen, denn auch die Jacobi'sche Multiplikatorgleichung bleibt bei gewissen ω-Substitutionen invariant, nur nicht bei den Substitutionen der 1ten sondern bei denen der 2ten Stufe.

Wir werden jetzt die ganze Fragestellung verallgemeinern, indem wir eine Transformationstheorie bei beliebiger Stufenzahl entwickeln. Hiervon handelt ein besonderes Capitel der Modulf. (Bd II. Cap. 3).
Es sei $f(w)$ eine Modulfunction etwa von der r^{ten} Stufe. Bei einer Transformation n^{ter} Ordnung geht dieselbe über in $f\left(\frac{w}{n}\right)$. Hier entsteht nun die Aufgabe, den algebraischen Zusammenhang zwischen $f\left(\frac{w}{n}\right)$ und $f(w)$ in ähnlicher Weise zu untersuchen, wie es mit der algebraischen Beziehung zwischen $f\left(\frac{w}{n}\right)$ und $f(w)$ geschehen ist.
Das allgemeine Resultat, welches sich in dieser Hinsicht ergibt, lautet folgendermaßen:
Solange r und n relativ prim sind, liegt es ähnlich wie bei den Functionen der 1ten Stufe. Besonderheiten treten nur auf, wenn r und n einen Teiler gemein

haben. In allen Fällen aber sind die beiden Moduln durch eine algebraische Gleichung verbunden.

Hierzu zunächst einige Beispiele aus der vorhandenen Literatur.

Die sog. „Modulargleichung.", welche in der Jacobi'schen Theorie vorkommen, liefern den algebraischen Zusammenhang zwischen dem Modul

$$\sqrt[8]{\lambda(\omega)} = \sqrt[8]{k}$$

und den durch Transformation n^{ter} Ordnung aus ihm entstehenden Größen. Der hier betrachtete Modul ist von der 16ten Stufe. Nach der obigen allgemeinen Bemerkung hat man daher zwischen geradem und ungeradem n zu unterscheiden. Für ein ungerades n wird die Theorie der Jacobi'schen Modulargleichung ganz ähnlich ausfallen, wie die Theorie der Gleichung $F(J', J)$. Ferner erwähnen wir die sog. Schläfli'schen Modulargleichungen.

Schläfli beschäftigt sich in Crelle Bd. 72, 1870 mit der Transformation der Moduln 48ter Stufe.

$$\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)} = \sqrt[12]{k k'},$$

welcher bemerkenswert einfache Resultate liefert, worauf insbesondere Weber in seinem Buche zurückgekommen ist. Da 48 die Primfaktoren 2 und 3 enthält, sind hier die geraden und die durch 3 teilbaren Transformationsgrade besonders zu behandeln.

Zu dieser Vorlesung werde ich insofern die Transformationstheorie des Moduls $\zeta(w)$, d. h. der Kroneckerirrationalität bevorzugen, ohne damit behaupten zu wollen, daß dieser Modul interessanter ist, als andere. Es ist mehr, daß ich wünsche, die Kroneckerirrationalität $\zeta(w)$ nach allen Richtungen zur Geltung zu bringen, und daß ich der allgemeinen Untersuchung der höheren Moduln einen neuen An-

stoss geben möchte.
Die Größe $\zeta(\omega)$ ist wie wir wissen, Hauptmodul der fünften Stufe. Nun zerfallen Modulo 5 die $\binom{\alpha\beta}{\gamma\delta}$ Substitutionen in 60 Klassen. Zwischen J und S besteht daher eine Gleichung 60ten Grades $J = R_{60}(S)$, die sog. Ikosaedergleichung, die wir schon oben angaben, ihre Wurzeln drücken sich linear durch eine aus. Wir schreiben die 60 Wurzeln in dem folgenden Schema zusammen, in welchem $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ist (vergl. Ikosaeder pg. 43):

$$\varepsilon^{\nu}\xi \quad , \quad -\frac{\varepsilon^{\mu}}{\xi}$$

$$\varepsilon^{\nu}\cdot\frac{\mu-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{\nu}\xi+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{\nu}\xi+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \quad , \quad \varepsilon^{\mu}\cdot\frac{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{\nu}\xi+(\varepsilon-\varepsilon^4)}{(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{\nu}\xi+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}.$$

Geben wir hierin μ und ν die Werte 1, 2, 3, 4, 5, so stellt die erste Zeile 2×5, die zweite 2×25 Werte dar. Im Ganzen haben wir hier die 60 Wurzeln der Ikosaedergleichung vor uns. Wir haben hier vor allen Dingen

zu constatiren, daß die Coefficienten der angeschriebenen Substitutionen nicht im natürlichen, sondern in dem durch die 5te Einheitswurzel erweiterten Rationalitätsbereiche liegen. Daher können wir die Ikosaëdergleichung nur dann als <u>Galois'sche Gleichung</u> bezeichnen, wenn wir diese Einheitswurzel adjungiren. Das Hereinspielen der Zahleninrationalität ε ist für uns besonders interessant. Wir werden uns später darüber klar werden müssen, welche Folgen dieser Umstand für die Theorie der singulären elliptischen Gebilde hat, nämlich für denjenigen von uns zu entwickelnden Teil dieser Theorie, der sich mit der Ikosaëderirrationalität $\zeta(w)$ beschäftigt.

22. V. 96. Um Anschluß an die Formentheorie zu gewinnen, werden wir die Ikosaëdergleichung <u>homogen</u> machen, indem wir setzen $s = s_1/s_2$; sie lautet dann:

$$f : f-1 : 1 = H^3(\xi_1, \xi_2) : -T^2(\xi_1, \xi_2) : 1728 f^5(\xi_1,$$

Die Formen H, T und f, welche bez. von der 20ten, 30ten und 12ten Dimension sind, haben ein einfacher Bildungsgesetz. Nennen wir f die Grundform, so wird nämlich H die Hesse'sche Form von f und T die Functionaldeterminante von f und H. Man erkennt hier den Nutzen der homogenen Variabeln. Uebrigens haben wir

$$f = \xi_1 \xi_2 (\xi_1^{10} + 11 \xi_1^5 \cdot \xi_2^5 - \xi_2^{10})$$

Ebenso wie die Variable ξ werden wir auch die Substitutionen von ξ homogen spalten. Wir richten es so ein, daß die entstehende binäre Substitution die Determinante 1 erhält und sprechen dann von einer <u>unimodularen binären Substitution</u>. Z. B. erreichen wir dieses bei der Substitution

$$\xi = \varepsilon \xi$$

dadurch, daß wir setzen

$$\xi_1' = \pm \varepsilon^3 \xi_1,$$
$$\xi_2' = \pm \varepsilon^2 \xi_2.$$

Bei dieser Spaltung bleibt notwendiger Weise ein Vorzeichen unbestimmt, so daß sich die Zahl der Substitutionen von 60 auf 120 vergrößert. Ebenso wie die nicht-homogene Thoraedergleichung bei den pg. 76 angegebenen 60 nicht-homogenen Substitutionen von ξ bleibt die homogen gemachte Thoraedergleichung und sogar die einzelne Form f, H und T bei den 120 homogenen unimodularen Substitutionen von ξ_1, ξ_2 ungeändert.

Wir kommen nun zu der Transformationstheorie des Modulo $\xi(w)$. Dieselbe ist ausführlich von Fricke in seiner Dissertation, Leipzig 1886 behandelt. Vergl. andererseits Modulf. II pg. 150. Setzen wir den Transformationsgrad

n 5 relativ prim voraus, so bekommen wir ganz ähnliche Resultate wie pg. 28 für die erste Stufe.

1. Zunächst wissen wir, dass

$$\xi = \xi(\omega)$$

bei den Substitutionen der Hauptuntergruppe 5ter Stufe und bei keinen anderen Umänderungen von ω ungeändert bleibt. Wir wollen dieselben durch die Schreibweise

$$\omega' = \frac{A\omega + B}{C\omega + D} \quad \begin{pmatrix} A \equiv D \equiv 1 \pmod 5 \\ B \equiv C \equiv 0 \pmod 5 \end{pmatrix}$$

kenntlich machen.

2. Sodann fragen wir, bei welchen dieser Substitutionen die transformirte Größe

$$\xi' = \xi\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

ungeändert bleibt. Wir können unsere Substitution ersichtlich so schreiben:

$$\frac{\omega'}{n} = \frac{A\left(\frac{\omega}{n}\right) + \frac{B}{n}}{C_n\left(\frac{\omega}{n}\right) + D}$$

und erkennen sofort, dass $\xi\left(\frac{\omega}{n}\right)$

ungeändert bleibt, wenn nur $\frac{B}{n}$ eine ganze Zahl ist. Dieselbe Bedingung haben wir pg. 39 bei der Transformation von f kennen gelernt. Das Besondere ist hier nun, daß B von vorneherein bereits der Congruenz $B \equiv 0 \pmod 5$ genügt. Es ist nun verständlich, daß diese beiden Congruenzen in keiner Weise collidiren, sofern wir n relativ prim zu 5 voraussetzen, wie wir es thaten, und daß weiterhin eine ganz ähnliche Transformations-theorie herauskommt, wie auf der 5ten Stufe.

3. Wir bestimmen jetzt den <u>Index</u> derjenigen Untergruppe, welche an der Hauptcongruenzgruppe 5ter Stufe durch die Bedingung

$$B \equiv 0 \pmod n$$

ausgesondert wird. Derselbe ergibt sich wie früher zu

$$\psi(n) = \left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) \cdots$$

Die Substitutionen $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ etc.

fallen also für uns in $\psi(n)$ Classen.
Zu jeder Classe können wir wie früher einen Repraesentanten wählen etc. etc.

4. Dementsprechend besteht der Fundamentalbereich unserer Untergruppe aus $\psi(n)$ Einzelbereichen, d. h. hier aus $\psi(n)$ Vierecksnetzen, deren jedes seinerseits aus 60 Doppeldreiecken der ursprünglichen Modulteilung besteht.

5. Der nächste Schritt wird der sein, dass wir das Verhalten von $\xi'(w)$ und $\xi(w)$ in dem genannten Fundamentalbereiche durch Aufstellen von Reihenentwickelungen in ähnlicher Weise wie pg. 49 untersuchen. Dabei zeigt sich, dass ξ und ξ' relativ zum Fundamentalbereiche keine wesentlichen Singularitäten haben.

6. Mithin besteht zwischen ξ und ξ' eine algebraische Relation, welche wir vorläufig so schreiben wollen:

$$f_1(\xi', \xi) = 0.$$

Sie ist vom Grade $\psi(n)$ in jeder der beiden Variabeln, besitzt ganzzahlige Coëfficienten etc. Wir bezeichnen sie als <u>Transformationsgleichung n^{ter} Ordnung der Ikosaëderirrationalität</u>.

Nun wäre die Frage, wie wir diese Gleichung wirklich aufstellen können. Zunächst möchte es scheinen, dass dieses im jetzigen Falle noch umständlicher sein wird, wie im Falle der Transformationsgleichung bei Zugrundelegung des j. In Wirklichkeit aber geht es viel einfacher.

Der Grund hiervon liegt in den <u>besonderen algebraischen Eigenschaften unserer Gleichung</u>, welche sich aus der Betrachtung der ω-Ebene ergeben. Wir lassen ω von einem Anfangswerthe aus in andere vermöge der Gesamtgruppe aequivalente Werte über.

geben. Dabei erleidet $\xi(w)$ die sämmtlichen 60 Ikosaëdersubstitutionen, sofern wir nur auf w aus jeder der modulo 5 unterschiedenen 60 Classen von Substitutionen mindestens eine ausüben. Wir thun dieses, indem wir die folgenden Substitutionen betrachten ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen von der Determinante 1.):

$$w' = \frac{\alpha w + \beta n}{\gamma w + \delta}$$

Dieselben enthalten in der That, da n zu 5 relativ prim ist, Substitutionen aus allen 60 Classen unter sich. Mithin haben wir

$$\xi\left(\frac{\alpha w + \beta n}{\gamma w + \delta}\right) = S(\xi),$$

wo $S(\xi)$ eine Ikosaëdersubstitution bedeutet u. zw. jede beliebige, wenn wir $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ geeignet verändern.

Zu gleicher Zeit erleidet aber auch $\xi'(w)$ eine Ikosaëdersubstitution. Wir haben nämlich:

$$\xi\left(\frac{1}{n}\,\frac{\alpha w+\beta n}{\gamma w+\delta}\right)=\xi\left(\frac{\alpha\frac{w}{n}+\beta}{\gamma n\cdot\frac{w}{n}+\delta}\right)=S'(\xi')$$

unter S' wieder eine geeignete Fko. säedersubstitution verstanden.

Wenn also ξ übergeht in $S(\xi)$, wobei die Substitution S dem Schema entspricht: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta n\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, so verwandelt sich ξ' in $S'(\xi')$, wo nun S' durch das folgende Schema bestimmt wird: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma n & \delta\end{pmatrix}$.

Lassen wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle möglichen Werte durchlaufen, so erleidet ξ alle möglichen Fkor-säedersubstitutionen und ξ' gewisse, jenen in gesetzmäßiger Weise zugeordnete simultane Fkor-säedersubstitutionen. Dabei genügt es schon, für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die sämmtlichen modulo 5 genommenen Zahlen zu setzen, die $\alpha\delta-\beta\gamma n=1$ ergeben, weil 2 nach dem Modul 5 kongruente Substitutionen eo ipso die gleichen Werte von ξ und ξ' ergeben.

Die somit aufgefundene Eigenschaft der Wurzeln unserer Gleichung wollen wir als eine Eigenschaft der Gleichung selbst formulieren. Wir können dann sagen: Unsere Gleichung $f_n(\xi', \xi) = 0$ bleibt bei gewissen simultanen Fko. saëdersubstitutionen der Variabeln ξ', ξ ungeändert. Des Genaueren müssen wir 4 Fälle unterscheiden, je nachdem $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 5$ ist. Die Zusammenordnung der simultanen Substitutionen wird besonders einfach im Falle $n \equiv 1 \pmod 5$. Als dann sind nämlich die auf der vorigen Seite angegebenen Schemata nach dem Modul 5 überhaupt nicht verschieden. Mithin bleibt in diesem Falle die Gleichung $f_n(\xi', \xi) = 0$ ungeändert, wenn wir ξ und ξ' denselben, übrigens beliebigen Fkosaëdersubstitutionen unterwerfen, oder, wie wir sagen können, wenn wir ξ und ξ' cogredient substituiren.

Hinsichtlich der anderen Fälle

teilen wir Folgender ohne Beweis mit: man erhält aus der Substitution von ξ' die zugehörige von ξ, wenn man die in jener vorkommende Größe ε durch ε^n ersetzt.
Bei der so hergestellten simultanen Substitution von ξ, ξ' bleibt dann die Gleichung $f_1(\xi, \xi') = 0$ wiederum ungeändert.

Im Folgenden beschränken wir uns der Kürze halber auf den Fall $n \equiv 1 \pmod 5$. Um aus der geschilderten algebraischen Eigentümlichkeit ein Verfahren zur Herstellung der Gleichung abzuleiten, nehmen wir wieder Bezug auf die Formentheorie. Wir schreiben unsere Gleichung homogen-machend

$$f_1(\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2) = 0$$

und üben auf die Variabeln sog. gradiente binäre unimodulare Hermitesubstitutionen aus. Dann bleibt nicht nur die Gleichung

sondern auch die linke Seite der Gleichung, d. h. die Form $f_1(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2)$ ungeändert. Im Uebrigen bemerken wir, ohne es hier auszuführen, dass f auch bei Vertauschung der ξ und ξ' ungeändert bleiben muss.

Wir suchen nun zunächst die <u>einfachsten Formen</u> dieser Art auf und bilden das <u>vollständige System solcher Formen</u>, aus denen sich alle übrigen Formen rational und ganz darstellen lassen. Wir können sofort vier doppelt-binäre Formen in $\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2$ angeben, welche in diesen beiden Variabelreihen symmetrisch sind, bei Ausübung unserer simultanen Koordinatensubstitutionen ungeändert bleiben. Es sind dieses:

$$A_1 = \xi_1 \xi_2' - \xi_2 \xi_1'$$

$A_6 = 6^{\text{ten}}$ Polare von $f(\xi_1, \xi_2)$

$A_{10} = 10^{\text{ten}}$ " " $H(\xi_1, \xi_2)$

$A_{15} = 15^{\text{ten}}$ " " $T(\xi_1, \xi_2)$.

Daß die Form A_1 oder vielmehr die geraden Potenzen von A_1 (und andere kommen weiterhin nicht vor) die genannten Eigenschaften besitzen, ist von vorneherein klar. Was A_6, A_{10}, A_{15} betrifft, so wird bei der Polarenbildung der Grad von f, H, T in ξ, welcher bez. gleich 12, 20, 30 ist, auf 6, 10, 15 Einheiten verringert, wofür der Grad in ξ' auf 6, 10, 15 ansteigt. Daß diese Formen bei den simultanen Kosaïdersubstitutionen invariant bleiben, folgt aus der Invarianten-Natur des Polarenprozesses und daraus, daß die Formen f, H, T sich bei Kosaïdersubstitutionen von ξ_1, ξ_2 nicht ändern.

Es zeigt sich nun weiter, daß die angeschriebenen vier Formen das volle Formensystem für die Invarianten der Kosaïdersubstitutionen bilden. Daraufhin können wir unsere gesuchte Form f, als ganze Funktion der A_1, A_6, A_{10},

A_{15} mit unbestimmten Coefficienten ansetzen.

Die Möglichkeit dieses Verfahrens ist durchaus an die homogene Formulirung des Problems gebunden. Wegen der allgemeinen Durchführung vergl. die genannte Dissertation von Friedrich oder auch Modulf. II pag. 137 - 141, wo auch die Fälle $n = 2, 3, 4 \pmod 5$ berücksichtigt sind.

Hier wollen wir uns auf ein Zahlenbeispiel beschränken, indem wir n. 11 nehmen. Nach der Rechnung von Friedrich, die sich auf die Reihenentwickelungen von ξ und ξ' stützt, lautet die Transformationsgleichung, welche vom Grade $\Psi(n) = 12$ ist, folgendermaßen:

$$11.17.A_6^2 - 18.49\,A_1^2 A_{10} - 8.11.335.A_1^6 A_6 - 17.75841\,A_1^{12} = 0.$$

Wir bemerken noch, daß an die Ausrechnung der entsprechenden Transformationsgleichung für j, j' gar nicht zu denken ist,

da schon die Transformationsglei-
chung 3ter Ordnung, wie wir sahen,
ausserordentlich complicirt war.
Die relativ einfache Gestalt der
Transformationsgleichungen für ξ, ξ' liegt
in der Einführung der Aggregate
A_1, A_6, A_{10}, A_{15} begründet, die al-
lerdings ihrerseits ziemlich compli-
cirte Functionen von ξ, ξ' sind.
Mit der Aufstellung der einen
Gleichung $f_1(\xi', \xi) = 0$ ist indessen
die Theorie der Transformationen
5ter Stufe nicht abgeschlossen. Wir
können nämlich statt des willkür-
lich herausgegriffenen Wertes $\xi(w)$
ebenso gut ausgehen von einem
der 59 anderen Werte $\xi\left(\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}\right)$, wo
die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ modulo 5
zu unterscheiden sind. Es bedeutet
dieses nichts Anderes, als dass wir
den Wert von ξ einer der 60 Ikо-
saëdersubstitutionen unterwer-
fen. Zu jedem dieser Werte
können wir dann die zugehöri-
ge Gleichung vom Grade $\psi(n)$ auf-

stellen, welche ihm mit dem transformirten Werte $\xi' = \xi\left(\frac{w}{n}\right)$ verbindet. Diese 60 Gleichungen müssen natürlich übereinstimmen mit denjenigen, die man aus $f(\xi', \xi) = 0$ ableitet, indem man auf ξ allein die 60 Ikosaedersubstitutionen ausübt.

In entsprechender Weise könnten wir auch mit ξ' verfahren, indem wir $\xi'(w)$ durch $\xi'\left(\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}\right)$ ersetzen. Es erscheint hiernach, dass wir aus jeder der vorgenannten 60 Gleichungen abermals 60 neue Gleichungen erhalten, im Ganzen also 3600. Dem ist aber nicht so; denn jede von diesen Gleichungen geht durch gewisse 60 simultane Ikosaedersubstitutionen für ξ und ξ' in sich über, wie wir es gerade für f_1 sahen und von da aus für die übrigen erschliessen.

Es bleiben also nur 60 verschiedene Gleichungen übrig.

Diese Gleichungen seien:

$$f_1(\xi', \xi) = 0$$

$$f_2(\xi', \xi) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_{60}(\xi', \xi) = 0$$

Hier entsteht die interessante Aufgabe, diese 60 Gleichungen in ihren gegenseitigen Beziehungen neben einander zu betrachten. Hier kommt vor Allem der Begriff gleichberechtigter Gleichungen zur Geltung. Wir werden nämlich zwei Gleichungen dann gleichberechtigt nennen, wenn wir sie dadurch in einander überführen können, daß wir auf ξ' und ξ gleichlautende Ikosaëdersubstitutionen oder, wie man auch sagt, cogrediente Ikosaëdersubstitutionen, ausüben. Doch können wir Näheres hierüber erst später mitteilen.

Zweiter Hauptteil.

Composition zusammengehöriger ganzzahliger Gitter.

4. VI. 96. Wir wenden uns nun zu neuen arithmetischen Entwickelungen betr. ganzzahlige Gitter.
Dieselben sollen uns hernach gute Dienste leisten, wenn wir fragen, wie sich die allgemeine Transformationstheorie der elliptischen Functionen im Falle ganzzahliger Gitter modificiren mag. Das Specifische unserer neuen Betrachtung ist, daß wir immer diejenigen ganzzahligen Formclassen, welche zu derselben Discriminante D gehören, neben einander betrachten. Wir lernten früher (vergl. Teil I pg 169), daß die Zahl dieser Classen eine endliche ist. Unter den Discriminanten

überhaupt sind von besonderer Wichtigkeit diejenigen, welche wir pg. 33 Stammdiscriminanten nannten und welche wir mit d bezeichnen wollen. Ihre Wichtigkeit beruht auf dem Satze von pg. 33, nach welchem alle Gitter, deren Discriminante keine Stammdiscriminante ist, sondern aus einer solchen durch Multiplication mit n^2 hervorgeht, aus Stammgittern durch Transformation n^{ter} Ordnung gewonnen werden. Die Stammdiscriminanten zerfallen, wie gleichfalls pg. 33 hervorgehoben, in zwei Arten, je nachdem d durch 4 teilbar ist oder nicht. Ist $d \equiv 0 \pmod 4$, so bezeichnen wir d als Stammdiscriminante erster Art, ist $d \equiv 1 \pmod 4$, so bezeichnen wir d als Stammdiscriminante zweiter Art. Unter den zu gleicher Stammdiscriminante gehörigen Formen gibt es eine ausgezeichnete, welche Hauptform heisst.

Und zwar definiren wir

$x^2 - \frac{d}{4} y^2$ als <u>Hauptform erster Art</u>

$x^2 + xy + \frac{1-d}{4} y^2$ <u>als Hauptform zweiter Art</u>.

Allemal konnten wir eine quadratische Form in zwei Linearfactoren spalten, welche wir als <u>Gitterzahlen</u> oder auch als Minimalcoordinaten bezeichneten. Diese Größen waren nur bis auf einen willkürlichen Factor bestimmt, den sog. „<u>Azimuthalfactor</u>". Wir setzten bereits fest, daß bei negativer Discriminante der Azimuthalfactor den absoluten Betrag 1 haben (vergl. Teil I pag. 67) und daß er bei positiver Discriminante reell sein sollte (vergl. Teil I pag. 78).

Das Product zweier zusammengehöriger Azimuthalfactoren mußte dabei stets gleich 1 sein.

Speciell liegt nun bei den Hauptformen eine bestimmte Art der Spaltung besonders nahe, welche wir

hiermit verabreden wollen. Wir werden eine Hauptform erster Art in die Factoren

$$\xi = x + \frac{\sqrt{d}}{2} y, \quad \eta = x - \frac{\sqrt{d}}{2} y$$

und eine Hauptform zweiter Art in

$$\xi = x + \frac{1+\sqrt{d}}{2} y, \quad \eta = x + \frac{1-\sqrt{d}}{2} y$$

auflösen, wodurch bei den Hauptformen die Azimuthalfactoren festgelegt sind.

Wir wollen ferner für die Hauptformen eine feste Art der geometrischen Darstellung verabreden, indem wir ihnen ein ganz bestimmtes Gitter coordiniren. Aus dem ersten Teile dieser Vorlesung wissen wir, daß wir jeder Form jeder beliebige Gitter zuordnen können, wofern wir nur die Maaßbestimmung in der Ebene geeignet definiren. Indessen ist es bequem, bei den folgenden Betrachtungen speciell in folgender Art zu verfahren:

Es handle sich zuerst um

Hauptformen erster Art. Je nachdem d positiv oder negativ ist, haben wir noch zwei verschiedene Fälle von Hauptformen erster Art zu unterscheiden. Wir gehen von einem rechtwinkligen Coordinatensystem u, v aus, wobei jedem Punkt der Ebene in gewöhnlicher Weise zwei Coordinaten u, v entsprechen. Wir setzen dann

bei positivem d

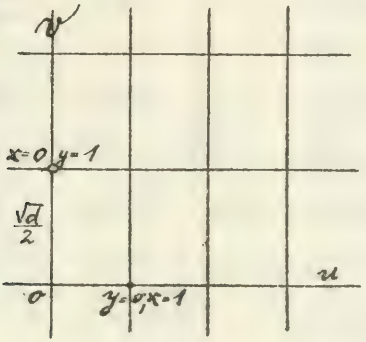
$$x = u \,, \quad y = \frac{2v}{\sqrt{d}} \,,$$

bei negativem d

$$x = u \,, \quad y = \frac{2iv}{\sqrt{d}} \,.$$

Die Gitterecke $x = 1$, $y = 0$ wird infolgedessen mit dem Punkte $u = 1$, $v = 0$ der Ebene zusammenfallen. Andrerseits fällt die Gitterecke $x = 0$, $y = 1$ in den Punkt $u = 0$, $v = \frac{\sqrt{d}}{2}$ bez. (bei negativem d) in den Punkt $u = 0$, $v = \frac{\sqrt{d}}{2i}$. Durch die genannten beiden Eckpunkte und den Anfangspunkt ist ein erstes Parallelogramm unseres Gitters und

weiterhin das ganze Gitter bestimmt. Das Gitter wird, wie man sieht (vergl. die folgende Figur),



ein rechteckiges Gitter. Die zugehörigen Gitterzahlen sind nach pg. 97, je nachdem $d > 0$ oder $d < 0$ ist:

$$\xi = u + v \qquad \xi = u + iv$$

bez.

$$\eta = u - v \qquad \eta = u - iv$$

Wir betrachten zweitens die Hauptformen zweiter Art. Nachdem wir, wie vorher, ein gewöhnliches rechtwinkliges Coordinatensystem u, v definirt haben, setzen wir im

Falle $d > 0$ bez. $d < 0$;

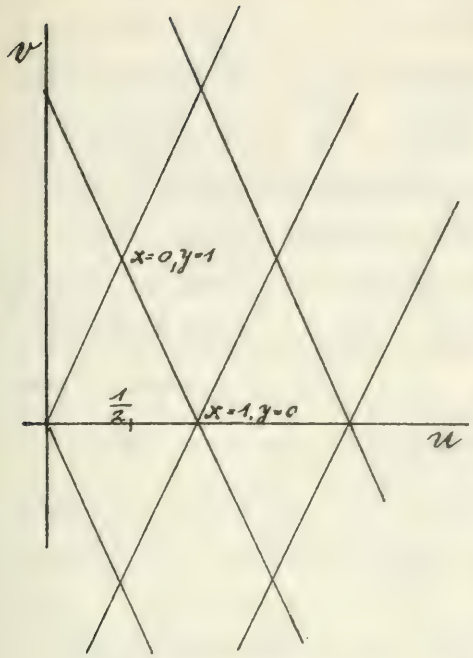
$$u = x + \frac{y}{2} \qquad u = x + \frac{y}{2}$$

bez.

$$v = \frac{\sqrt{d} \cdot y}{2} \qquad v = \frac{\sqrt{d} \cdot y}{2i}$$

Hiemach bestimmen wir die den Ecken des ersten Parallelogramms entsprechenden Punkte der Ebene. Offenbar hat der Punkt $x = 1$, $y = 0$ die Coordinaten $u = 1$, $v = 0$. Dieser Eckpunkt hat also dieselbe Lage, wie vorher, es ist der Einheitspunkt der u-Axe.

Ferner haben wir im Punkte $x = 0$, $y = 1$ die Coordinaten $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{\sqrt{d}}{2}$ bez. $v = \frac{\sqrt{d}}{2i}$. Mithin liegt der Eckpunkt $x = 0$, $y = 1$ jetzt nicht wie vorher auf der v-Axe, vielmehr hat er von dieser den Abstand $\frac{1}{2}$. Das aus dem Punkt $x = 0$, $y = 1$ und $x = 1$, $y = 0$ sowie aus dem Anfangspunkte gebildete Dreieck ist ein gleichschenkliges; durch geeignete Verdoppelung desselben (vergl. die Figur auf Seite 101) erhalten wir als ersten Parallelo-



gramm unseres Gitters einen Rhombus. Den Hauptformen zweiter Art entspricht also in Folge unserer Verabredung ein <u>rhombisches Gitter</u>. Die zugehörigen Gitterzahlen drücken sich durch die Coordinaten u und v gerade so aus, wie bei den Hauptformen erster Art; es wird nämlich

$$\xi = u + v \qquad \xi = u + iv$$

bez.

$$\eta = u - v \qquad \eta = u - iv.$$

Wir können, zusammenfassend für beide Formenarten, die geometrische Bedeutung der Gitterzahlen im

der u, v - Ebene dadurch beschreiben, daß wir sagen:
Im Falle eines positiven d sind die Gitterzahlen die mit $\sqrt{2}$ multiplicirten Abstände, welche die Eckpunkte des Gitters von den die Quadranten der u, v - Ebene halbirenden Geraden besitzen. Im Falle eines negativen d aber sind es die gewöhnlichen complexen Zahlen, welche man den Gitterpunkten in der Gaussischen Ebene beizulegen gewohnt ist.

In der That wird f beziehungsweise gleich $u^2 - v^2$ und $u^2 + v^2$ sein.

Wir werden nun zeigen, daß die hiermit durchgeführte Construction der Hauptgitter in dem allerengsten Zusammenhange mit der Theorie der quadratischen Körper steht, welche sonst in abstracter Weise entwickelt wird und die hier in ihren Grundlagen als bekannt vorausgesetzt werden

soll (vergl. etwa die Darstellung in Dedekind's Zahlentheorie oder auch die Protokolle des Hintersemesters).

Ein quadratischer Körper wird definirt durch die Irrationalität $\sqrt{m}$, wo m als quadratfreie Zahl vorausgesetzt wird, indem nämlich ein etwaiger quadratischer Teiler von m für den Körper irrelevant wäre. Bestimmt man nun die ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $K(\sqrt{m})$, so wird eine Fallunterscheidung nöthig, je nachdem

$$m \equiv 2 \text{ bez. } \equiv 3 \pmod 4$$

oder

$$m \equiv 1 \pmod 4$$

ist. Im ersten Falle haben die ganzen Zahlen des Körpers die Gestalt:

$$x + y\sqrt{m};$$

im zweiten Falle sind sie dargestellt durch

$$x + y\frac{1+\sqrt{m}}{2},$$

wo beidemal unter x und y ganze rationale Zahlen verstanden werden. Als <u>Basis des Körpers</u> haben wir hiernach zu bezeichnen:
im ersten Falle die beiden Größen

$$1, \sqrt{m},$$

im zweiten Falle die beiden folgenden Zahlen

$$1, \frac{1+\sqrt{m}}{2}$$

Als <u>Discriminante dieses Körpers</u> definirt man bekanntlich das Quadrat der aus der Basis und ihren conjugirten Werten gebildeten Determinante. Hiernach wird im ersten Falle:

$$d = \begin{vmatrix} 1, & \sqrt{m} \\ 1, & -\sqrt{m} \end{vmatrix}^2 = 4m,$$

im zweiten Falle dagegen:

$$d = \begin{vmatrix} 1, & \frac{1+\sqrt{m}}{2} \\ 1, & \frac{1-\sqrt{m}}{2} \end{vmatrix}^2 = m.$$

Den ganzen algebraischen Zahlen des Körpers können wir hiernach im einen oder anderen Falle bez.

die Form geben:

$$x + y\frac{\sqrt{d}}{2} \quad \text{bez.} \quad x + y\frac{1+\sqrt{d}}{2}.$$

Das sind aber, wie wir sehen, genau dieselben Verbindungen, welche wir oben (pg. 96) als Gitterzahlen ξ bezeichneten und aus den zur Discriminante d gehörigen Hauptformen 1ter und 2ter Art ableiteten. Das heißt also: die zu der Hauptform einer Stammdiscriminante d vermöge unserer Verabredungen gehörigen Gitterzahlen ξ sind mit den ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $K(d)$ genau identisch.

Unsere Gitterbetrachtung weist uns aber darauf hin, neben den Gitterzahlen ξ gleichzeitig die Gitterzahlen η im Auge zu haben. Für die Körpertheorie ergiebt sich daraus, daß wir neben den Körper $\sqrt{d}$ (welcher von dem Körper $\sqrt{m}$ ersichtlich nicht verschieden ist) gleichzeitig den conjugirten Kör-

der $-\sqrt{d}$ stellen sollen.

Diese Modification der Betrachtung ist allerdings im Falle der quadratischen Körpers keine eigentliche Erweiterung, da nämlich $-\sqrt{d}$ ersichtlich rational durch $+\sqrt{d}$ ausgedrückt werden kann, so ist $k(-\sqrt{d})$ mit $k(+\sqrt{d})$ identisch. Dieselbe sehr selbstverständliche Thatsache, meint man, wenn man sagt: Der quadratische Körper ist ein Galois'scher Körper: oder: die quadratische Gleichung ist eine Galois'sche Gleichung. Trotzdem ist die durch unser Gitter indicirte consequente Nebeneinanderstellung der Zahlen $x + y\frac{\sqrt{d}}{2}$ und $x - y\frac{\sqrt{d}}{2}$ etc. sehr nützlich. Es gilt das in verstärktem Maasse, wenn wir zu höheren Körpern schreiten. Wie sich unser geometrisches Bild auf diese höheren Fälle erweitert, ist unmittelbar verständlich. Wir haben dann nicht ein von Geraden gebildetes Gitter in der Ebene,

sondern ein Gitter im R_n zu betrachten, welches von einem Systeme paralleler aequidistanter R_{n-1} gebildet wird. Die discontinuirliche Anordnung der Gitter-Eckpunkte im R_n ist etwas durchaus Uebersichtliches. Dementsprechend wird sich bei gleichzeitiger Betrachtung der zu jedem Gitterpunkte gehörigen n Coordinaten (Gitterzahlen) eine übersichtliche Theorie der Gitterzahlen ergeben. Beschränken wir uns aber nur auf einen der n conjugirten Körper, d. h. auf nur eine der n Coordinaten der Gitterpunkte, so bedeutet dieses geometrisch, dass wir das n-dimensionale Gitter auf eine Mannigfaltigkeit von nur einer Dimension projiciren. Hierbei entsteht natürlich ein verworrenes Bild der räumlichen Anordnung, dessen Punkte auf der gewählten Coordinatenaxe im Allgemeinen überall dicht liegen werden.

Dementsprechend wird die Theorie der Gitterzahlen von diesem beschränkteren Standpunkte aus unübersichtlich werden. Uebrigens kommt ja ganz dieselbe Bemerkung in der Theorie der Abel'schen Funktionen zur Geltung, welche gerade durch den von Jacobi vollzogenen Uebergang zu höheren Dimensionen ihre heutige einfache Gestalt gewonnen hat.

11. VI. 96. Nachdem wir im Vorhergehenden für die Hauptformen eine bestimmte Zerlegung in Faktoren und daran anschliessend eine bestimmte geometrische Interpretation verabredet haben, werden wir jetzt das Entsprechende für die Nebenformen (Nebenklassen) durchführen. Ebenso, wie die Theorie der Hauptgitterzahlen übereinstimmt mit der Theorie der gewöhnlichen ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $\sqrt{d}$, so wer-

den wir erkennen, daß die Gitterzahlen der Nebenklassen auf die Idealtheorie des genannten quadratischen Körpers führen.

Es handelt sich um eine beliebige quadratische Form

$$f = a x^2 + b x y + c y^2$$

der Stammdiscriminante $d = b^2 - 4ac$.

Wir zerlegen dieselbe nach dem mehrfach genannten Schema

$$f = \xi \eta,$$

$$\xi = \varrho \left(\sqrt{a}\, x + \frac{b + \sqrt{d}}{2} y \right)$$

$$\eta = \frac{1}{\varrho} \left(\sqrt{a}\, x + \frac{b - \sqrt{d}}{2} y \right.$$

in Linearfactoren. Die geometrische Interpretation der „Gitterzahlen" ξ und η geschieht in derselben Weise, wie pg. 99 bis 101 im Falle der Hauptformen. Wir setzen nämlich

$$\xi = u + (i)\, v$$

$$\eta = u - (i)\, v.$$

welche abkürzende Schreibweise uns im Falle eines positiven oder

negativen d bez. die beiden Gleichungen $= u + v$ oder $= u + iv$ etc. vertreten soll, und deuten u und v als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene. Die Gitterzahlen bedeuten dann, wie früher, im Falle eines positiven d die mit $\sqrt{2}$ multiplizirten Abstände der Gitterpunkte von den die Quadranten der u, v-Ebene halbirenden Geraden; im Falle einer negativen d dagegen bedeuten sie einfach die den Gitterpunkten in der Gaussischen Ebene zugeordneten complexen Zahlen.

In unserer Zerlegung sind die Azimuthalfactoren ϱ und $\frac{1}{\varrho}$ vorläufig noch unbestimmt. Ein erster Schritt zu ihrer Festlegung soll der folgende sein:

Wir betrachten neben der Formenklasse, welche die Form (a, b, c) enthält, diejenige, in welcher die Form $(a, -b, c)$ vorkommt. Zwei solche Klassen nennen wir <u>conjugirte Klassen</u>. Eine Klasse, wel-

che mit ihrer conjugirten identisch ist, bezeichnen wir, wie schon Teil I pg. 162 hervorgehoben, als Ambigenusklasse.

Wir treffen nun die Verabredung, dass conjugirte Gitter mit conjugirten Factoren ϱ ausgestattet werden sollen, wobei wir zwei Factoren ϱ und ϱ' conjugirt nennen, wenn $\varrho\,\varrho' = 1$ ist. Hiernach lauten die zu zwei conjugirten Gittern gehörigen Gitterzahlen:

$$\xi = \varrho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right),\quad \eta = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right)$$

$$\xi' = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{-b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right),\quad \eta' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{-b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right).$$

Lassen wir hierin x und y alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir die Minimalcoordinaten der Eckpunkte desjenigen Punktgitters, welchem die Form (a, b, c) angehört; lassen wir ebenso

x' und y' alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir die Minimalcoordinaten der Eckpunkte des conjugirten Gitters, dem die Form $(a, -b, c)$ angehört. Unter den beiden unendlichen Serien von Punkten x, y und x', y' wollen wir je zwei solche Punkte mit einander vergleichen, für welche $x' = x$, $y' = -y$ ist. Ein Blick auf die vorstehenden Formeln zeigt dann, daß für solche Punkte

$$\xi' = \eta \quad \text{und} \quad \eta' = \xi$$

wird. Unsere Verabredung über die Azimuthalfactoren conjugirter Formen bringt es also mit sich, daß, wenn die Form f die Zerlegung

$$f = \xi \cdot \eta$$

liefert, die conjugirte Form f' die Zerlegung

$$f' = \eta \, \xi$$

giebt. Diese Thatsache hat eine einfache geometrische Bedeutung. Berücksichtigen wir nämlich den Zusammenhang zwischen den Coordinaten ξ, η und u, v, so ergeben sich aus den Gleichungen $\xi' = \eta$, $\eta' = \xi$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$u' \pm (i) v' = u \mp (i) v$$

d. h.

$$u' = u, \quad v' = -v.$$

Der Punkt u', v' geht also aus dem Punkte u, v durch Spiegelung an der u-Axe hervor. Ueberhaupt können wir sagen:

Zu Folge unserer obigen Verabredung liegen zwei conjugirte Gitter in Bezug auf die u-Axe spiegelbildlich zu einander.

Wir mögen noch hinzufügen, dass sie auch spiegelbildlich in Bezug auf die v-Axe liegen. Der Grund hiervon ist der, dass jedes Gitter bei einer Drehung von $180°$ um 0 mit sich zur Deckung kommt. In Folge dessen giebt

es in unserem ersten Gitter außer dem Punkte u, v auch stets einen Punkt -u, -v. In diesen wird aber der Punkt u, -v des zweiten Gitters durch eine Spiegelung an der v-Axe übergeführt.

Die Bestimmung der Azimuthalfactoren ist damit natürlich noch nicht abgeschlossen. Mit unseren bisherigen Verabredungen ist es verträglich, daß wir von zwei conjugirten Gittern das eine noch ganz willkürlich orientiren. Erst nachdem dieses geschehen, ist die Lage des zweiten Gitters festgelegt.

Nur in dem besonderen Falle der Antepsogitter ist durch das Vorstehende die Orientirung bereits genauer fixirt, da sie die besondere Eigenschaft haben, mit ihren conjugirten Gittern identisch zu sein. (Teil I pg 163). Nach dem eben Auseinandergesetzten erhält man das richtig orientirte conjugirte Gitter, wenn man das orientirte

ursprüngliche Gitter an der u - Axe (oder v - Axe) spiegelt, ein richtig orientirtes Anepsgitter muss daher so liegen, dass es durch Spiegelung an der u - (und v -) Axe in sich übergeht.

Wie wir nun früher gesehen haben, (vergl. Teil I pg. 232 ff.) läßt sich das Fundamentalparallelogramm eines Anepsgitters immer als Rechteck oder Rhombus wählen. Die Orientirung des Anepsgitters ist deshalb so auszuführen, dass eine Seite des Rechteckes oder eine Diagonale des Rhombus in die Richtung der u - (oder v -) Axe fällt.

Dies kann offenbar jedesmal nur auf höchstens zwei Weisen geschehen, da die Seiten des Rechteckes und die Diagonalen des Rhombus rechtwinklig auf einander stehen. Ein Anepsgitter läßt deshalb nach den vorstehenden Festsetzungen nur noch eine 2 - fache Möglichkeit der

Orientirung zu. Wir sprechen dies in folgendem Satze aus:

Unsere Verabredung über die sog. fingirten Gitter bedeutet für die Ausgangsgitter speciell eine noch auf 2 Weisen herzustellende Orientirung derselben.

Wir werfen noch einen Blick auf die Gesammtfigur, soweit sie sich aus unseren bisherigen Betrachtungen ergeben hat. Sie besteht aus einem System von h Gittern, einem Hauptgitter und h-1 Nebengittern. Das Hauptgitter haben wir bereits in eindeutiger Weise festgelegt, die Ausgangsgitter in zweideutiger Weise. Die übrigen Gitter sind einander paarweise zugeordnet und liegen spiegelbildlich in Bezug auf die Coordinatenaxen.

Jeder dieser Gitter liefert uns ein System von Gitterzahlen ξ, η. Die arithmetische Natur der Hauptgitterzahlen haben wir bereits oben besprochen: es

sind die ganzen Zahlen des Körpers $\sqrt{d}$. Die arithmetische Natur der Nebengitterzahlen hängt offenbar von der Wahl des Faktors ϱ ab. Wir wollen hierüber vorläufig nur soviel sagen, daß wir dieselben als Irrationalitäten fixieren werden, welche zu dem Körper $\sqrt{d}$ in einer einfachen Beziehung stehen.

Wir haben schon gelegentlich als Zielpunkt unserer Entwickelungen hingestellt, daß unsere h Gitter einen Organismus bilden und daß sie durch innere Beziehungen verbunden sind. Dies wird deutlich werden, wenn wir im Folgenden dazu übergehen, <u>Rechnungsregeln</u> festzusetzen, nach denen wir mit den Gitterzahlen ξ, η unserer h Gitter operieren wollen. Wir kommen hierdurch zu neuen fruchtbaren Fragestellungen und vertiefen unsere Auffassung der Gittertheorie.

Von der Composition der Gitter.

Es handelt sich zunächst darum festzusetzen, was wir unter der Operation der Addition und Multiplikation verstehen wollen. Wir sagen:

Man addirt Gitterpunkte, indem man ihre Minimalcoordinaten addirt.

Man multiplicirt Gitterpunkte, indem man ihre Minimalcoordinaten multiplicirt.

In Zeichen drücken wir dieses folgendermaßen aus. Gegeben seien zwei Gitterpunkte (ξ, η) und (ξ', η'). Nach den vorhergehenden Regeln haben wir

$$(\xi, \eta) + (\xi', \eta') = (\xi + \xi', \eta + \eta')$$

$$(\xi, \eta) \cdot (\xi', \eta') = (\xi\xi', \eta\eta').$$

Im Uebrigen setzen wir fest, daß wir nur solche Operationen vornehmen wollen, durch welche wir wieder auf Punkte unseres ursprünglichen

Figur geführt werden. Wir wollen also durch die vorzunehmenden Operationen keine neuen geometrischen Elemente bez. keine neuen Irrationalitäten einführen.

Was nun die Addition anbetrifft, so ergibt sich: Sind zwei Punkte (ξ, η) und (ξ', η') zu addiren, die demselben unserer h Gitter angehören, so liegt offenbar auch der Punkt $(\xi+\xi', \eta+\eta')$ in demselben Gitter, denn er wird durch geometrische Addition der Strecken von 0 nach (ξ, η) bez. nach (ξ', η') erhalten. Die gen dagegen die Punkte (ξ, η) und (ξ', η') in verschiedenen Gittern, so wird ihre Summe im Allgemeinen nicht in unserer Figur vorkommen. (vorausgesetzt natürlich, daß die Axiomathalfactoren irgendwie fixirt sind). Wir werden daher im Folgenden die Addition auch nur auf Punkte desselben Gitters anwenden.

Ebenso wie von der Addition der Gitterpunkte, werden wir auch von der Addition ganzer Gitter reden,

indem wir fortsetzen:

Man addirt zwei Gitter, indem man zu jedem Punkte des einen Gitters jeden des anderen addirt.

Auch die Addition der Gitter wird im Allgemeinen nicht statthaft sein, wenn wir an unserer Beschränkung festhalten und überdies als Resultat der Addition wieder eine discrete Punktmenge erhalten wollen. Doch kann man z. B. zwei dem Hauptgitter eingelagerte Gitter addiren, was wir in unseren späteren Entwickelungen auch ausführen werden. Wir verweilen deshalb noch einen Augenblick dabei, um zu untersuchen, was über die Discriminante der durch Addition zweier Gitter $\bar{G}_1$ und $\bar{G}_2$ (die wir etwa dem Hauptgitter eingelagert denken) resultirenden Gitters $\bar{G}_3$ auszusagen ist. Sind die Inhalte der Fundamentalparallelogramme von $\bar{G}_1$ und $\bar{G}_2$ resp. $m\sqrt{d}$ und $n\sqrt{d}$, so können wir den Inhalt der Fundamentalparallelogramms

von G_3 mit $r\sqrt{d}$ bezeichnen, unter m, n, r ganze rationale Zahlen verstanden. Es muss dann, wie wir behaupten r ein Teiler von m und n sein, weil die Gitter G_1 und G_2 in G_3 enthalten sein müssen. Ist nämlich ein Gitter $\underline{I}$ in einem Gitter $\underline{II}$ enthalten und haben die Fundamentalpunkte der ersteren in dem letzteren die Coordinaten x_0, y_0, x_1, y_1, so ist bekanntlich der Inhalt des Fundamentalparallelogramms von $\underline{I}$ $|x_0 y_1 - y_0 x_1|$ mal so gross als der von $\underline{II}$, also ein ganzzahliger Multiplum desselben. damit ist aber unsere Behauptung gerechtfertigt.

Ergiebiger ist für unsere Zwecke die Operation des Multiplicirens. Man darf, wie sich im Folgenden zeigen wird, zwei beliebige Gitterpunkte mit einander multipliciren, die Multiplication führt stets auf Gitterpunkte unserer Figur, vorausgesetzt, dass man die Azimuthalfactoren passend wählt.

Wir haben bereits festgesetzt, was wir unter der Multiplication zweier Gitterpunkte verstehen; wir wollen aber auch hier, ebenso wie bei der Addition, gleich die ganzen Gitter in Betracht ziehen und erklären, was man unter der Multiplication, oder besser gesagt, Composition zweier Gitter versteht.

Zwei Gitter G und G' componiren, heisst: alle Punkte von G mit allen Punkten von G' multipliziren und die so entstehenden Punkte auf alle möglichen Weisen addiren.

Die Operation der Componirens ist also nur theilweise eine Multiplication, theilweise dagegen eine Addition, die neue Bezeichnung ist deshalb durchaus gerechtfertigt.

Ebenso wie man nicht zwei beliebige Gitter addiren kann, ist es auch nicht möglich, sie zu componiren, schon aus dem Grunde, weil die Operation des Componirens das Addiren von Gitterzahlen in sich schliesst. Wir wollen deshalb in

Folgendem nun von der Composition unserer h Stammgitter reden, die stets ausführbar ist.

Wir führen zunächst den Nachweis, dass sich durch Composition zweier Stammgitter wieder ein Stammgitter derselben Discriminante ergibt.

Seien die zu componirenden Gitter:

$$G = \sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y \text{ und } G' = \sqrt{a'}\,x' + \frac{b'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'$$

und die entsprechenden Formen

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 \text{ und } f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2.$$

Um unsere Behauptung zu rechtfertigen, präpariren wir uns die Gitter resp. Formen erst in geeigneter Weise, indem wir ihnen im Anschluss an Dirichlet einige Lage geben.

Wir nennen nämlich zwei Formen einig, wenn die Coefficienten a und a' teilerfremd sind und die mittleren Coefficienten gleich.

Die letztere Bedingung hat eine einfache geometrische Bedeutung. Ist nämlich $b = b'$, so muss auch

infolge der Gleichheit der Discriminanten $ac = a'c'$ sein. Bezeichnen wir nun die Parallelogrammwinkel, die zu unseren Formen gehören, mit ψ und ψ', so ist

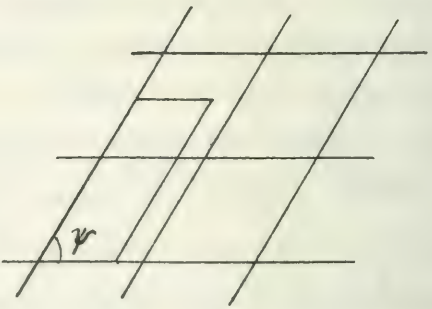
$$\cos\psi + i\sin\psi = \frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{ac}}$$

$\mathcal{S}$

$$\cos\psi' + i\sin\psi' = \frac{b'+\sqrt{D}}{2\sqrt{a'c'}} \quad \text{also}$$

da $\frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{ac}} = \frac{b'+\sqrt{D}}{2\sqrt{a'c'}}$, auch $\cos\psi + i\sin\psi = \cos\psi' + i\sin\psi'$ oder $\psi = \psi'$. Bei einiger Lage zweier Formen besitzen also die Fundamentalparallelogramme denselben Winkel.

Wir zeigen jetzt: wenn zwei Stammformen vorliegen, so können wir sie stets durch zwei aequivalente <u>einige</u> Formen ersetzen 1. Wir können bewirken, daß a und a' relativ prim werden (Vergl. Dir. Ed. pg. 234, 4te Auflage).



2. Wir führen an f bez. f' die Transformation erster Ordnung aus:

$$x = X + \lambda Y \qquad x' = X' + \mu Y'$$

$$y = Y \qquad y' = Y',$$

wodurch sich ergibt:

$$f = a X^2 + (2a\lambda + b) X Y + (a\lambda^2 + b\lambda + c) Y^2,$$

$$f' = a' X'^2 + (2a'\mu + b') X' Y' + (a'\mu^2 + b'\mu + c') Y'^2$$

Hier können wir λ und μ so bestimmen, daß

$$2a\lambda + b = 2a'\mu + b' \text{ wird.}$$

Denn die Congruenz

$$2a\lambda \equiv b' - b \pmod{2a'}$$

ist immer lösbar, da a und a' relativ prim sind und $b' - b \equiv 0 \pmod 2$ bei gleichem d.

Nennen wir nun den gemeinsamen Wert der mittleren Coefficienten der beiden Formen B

$$b = b' = B,$$

so folgt aus der Gleichheit der Dis.

Diskriminanten: $ac = a'c'$. Da nun a und a' als teilerfremd angenommen werden, so muß c durch a' und c' durch a teilbar sein. Wir setzen

$$c = a'C \qquad c' = aC$$

Die beiden Formen sind dann

$$(a, B, a'C) \text{ und } (a', B, aC)$$

und die entsprechenden Gitter:

$$G = \sqrt{a}\,x + \frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y \text{ und } G' = \sqrt{a'}\,x' + \frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'.$$

Nunmehr können wir folgende Identität aufschreiben:

$$\left(\sqrt{a}\,x + \frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)\left(\sqrt{a'}\,x' + \frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'\right) = \sqrt{aa'}\,(xx' - Cyy') +$$

$$+ \frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,(axy' + a'x'y + y$$

(1)

$$= \sqrt{aa'}\,X + \frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,Y \quad .$$

Aus dieser folgt: Wenn wir zwei Gitterzahlen aus den Gittern G und G' multiplizieren, so erhalten wir eine Gitterzahl, die zu dem Stammgitter

$$(aa', B, C) \qquad \text{gehört.}$$

Wir haben damit einen Teil unserer Behauptung bereits bewiesen, aber auch nur erst einen Teil. Wir haben nämlich gezeigt, daß durch Composition von G und G' Zahlen einer Stammgitters

$$G'' = \sqrt{aa'}\,X + \frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,Y$$

erhalten werden, aber noch nicht bewiesen, daß auch <u>alle Zahlen dieses Stammgitters</u> sich durch die Composition ergeben. Um dies noch zu zeigen, brauchen wir offenbar nur zu beweisen, daß die Basiszahlen von G''

$$\sqrt{aa'} \text{ und } \frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}$$

bei der Composition resultiren. Von der ersten ist dies sofort evident; die zweite ergibt sich auf folgende Weise. Bei der Composition erhalten wir offenbar die Gitterzahlen:

$$\frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\sqrt{a'} \text{ und } \frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\sqrt{a},$$

also auch alle Zahlen, die in der Formel enthalten sind:

$$\frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\sqrt{a'}z_1 + \frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\sqrt{a}\,z_2 \text{ oder}$$

$$\frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}(a'z_1 + a z_2),$$

unter z_1 und z_2 ganze rationale Zahlen verstanden. Da nun a' und a teilerfremd sind, ist z_1 und z_2 stets so zu bestimmen, daß $a'z_1 + a z_2 = 1$ wird, d. h.

$$\frac{B+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}$$

wird bei der Composition ebenfalls erhalten.

Nimmt man noch hinzu, was selbst verständlich, daß durch die Orientierung von $\mathfrak{F}''$ und $\mathfrak{F}'$ auch die von $\mathfrak{F}$ bestimmt ist, so können wir jetzt den Satz aussprechen:

Zwei irgendwie orientirte Stammgitter ergeben componirt wieder ein ganz bestimmt orientirtes Stammgitter.

Der vorstehende Satz ist der Fundamentalsatz der ganzen Theorie, auf dem, im Grunde genommen, alles Folgende ruht. Bei seinem Beweise sind wir erst auf Umwegen zu der durch Composition resultirenden Form gelangt. es gibt aber auch eine Regel, wie man direct diese Form finden kann. Wir führen dieselbe hier ohne Beweis an indem wir auf eine Abhandlung von Arndt, Crelle's Journal Bd. 56, 1857 verweisen. Es mögen die früheren Bezeichnungen beibehalten werden, es seien also die zu componirenden Gitter

$$\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y \quad \text{und} \quad \sqrt{a'}\,x' + \frac{b'\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'$$

Die für das componirte Gitter charakteristischen Zahlen a'' und b'' werden dann auf folgende Weise bestimmt: Es wird

$$a'' = \frac{aa'}{\mu^2},$$

wo μ der grösste gemeinsame

Teiler von

a, a' und $\frac{b+b'}{2}$ ist. Weiter muss b'' den 3 Congruenzen genügen

$$b'' \equiv b \pmod{\frac{2a}{\mu}} \qquad b''\frac{a'}{\mu} \equiv b\frac{a'}{\mu} \pmod{\frac{2a}{\mu}}$$

$$b'' \equiv b' \pmod{\frac{2a'}{\mu}} \quad \text{oder} \quad b''\frac{a}{\mu} \equiv b'\frac{a}{\mu} \pmod{\frac{2a}{\mu}}$$

$$\left(\frac{b+b'}{2\mu}\right)b'' \equiv \frac{bb'+d}{2\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}} \qquad b''\frac{b+b'}{2\mu} \equiv \frac{bb'+d}{2\mu} \pmod{\frac{2}{\mu}}$$

Bezeichnet man nun mit r, s, t drei ganze rationale Zahlen, die der Bedingung genügen

$$\frac{a'}{\mu}r + \frac{a}{\mu}s + \frac{b+b'}{2\mu}t = 1$$

(solche gibt es stets, da $\frac{a}{\mu}$, $\frac{a'}{\mu}$ und $\frac{b+b'}{2\mu}$ teilerfremd sind), so erhält man, wenn man die 3 Congruenzen resp. mit r, s, t multiplicirt und addirt:

$$b'' \equiv b\frac{a}{\mu}r + b'\frac{a}{\mu}s + \frac{bb'+d}{\mu}\cdot\frac{b+b'}{2\mu}t \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2} = 2a''}$$

Damit ist aber b'' völlig festgelegt,

denn dasselbe ist offenbar nur mod. $\Sigma a''$ bestimmt.

Die Compositionstheorie ist von Gauss in den Disquisitiones arithmeticae begründet worden. Gauss spricht natürlich nicht von den Gitterzahlen, sondern von den zugehörigen Formen. Zu der Composition der Formen kommen wir unmittelbar, indem wir in der Gleichung:

$$\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)\left(\sqrt{a'}\,x' + \frac{b'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'\right) = \sqrt{a''}\,x'' + \frac{b''+\sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}\,y''$$

rechts und links die Form bilden. Die so entstehende Gleichung:

$$(ax^2+bxy+cy^2)(a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2) = a''x''^2+b''x''y''+c''y''^2$$

können wir folgendermassen in Worte fassen:

Die rechts stehende Form zerfällt in das Product der beiden links stehenden, wenn wir für x'', y'' gewisse bilineare ganzzahlige Verbindungen

der x y und x' y' eindeutig (wie sie aus den Formeln (1) pg. 126 hervorgehen).

Wir können aber diese Darstellung der Theorie unmöglich für zweckmäßig halten. Offenbar dringen wir tiefer in den wahren Sachverhalt ein, wenn wir von den complexen Factoren als wenn wir von ihrem Product, den Formen sprechen. Denn der einzelne complexe Factor enthält absoluten Betrag + Azimuth, während in dem correspondirenden Werte der Form nur der absolute Betrag hervortritt.

Die Composition der Formen ist nur ein Corollar, nicht ein Aequivalent für die Composition der Gitterzahlen.

Man wird dies umsomehr zugeben, wenn man bedenkt, daß der Rückschluß von den Formen zu den Gittern nicht ohne weiteres möglich ist. Es kann sehr wohl sein, daß eine Stammform F, wenn man für ihre Variabeln ganzzahlige

bilineare Verbindungen zweier anderer Variabelpaare setzt, in das Product zweier Stammformen F und F' zerfällt, ohne daß darum ein zu F" gehöriger Gitter sich aus 2 passend orientirten zu F und F' gehörigen 2 Gittern componiren liesse.

Man kann die Frage aufwerfen, warum Gauss dennoch diese Form der Darstellung gewählt hat. Wir können natürlich darüber nichts Bestimmtes aussagen. Immerhin hat, wenn man die späteren Ausführungen von Gauss über die Gittervorstellung im Falle negativer Discriminanten (vergl. seine Anzeige des Buches von Seeber, ges. Werke Bd. II.) und seine Publicationsweise berücksichtigt, die Auffassung manches für sich, daß Gauss selbst im Besitz der Gitterzahlen sein mochte, daß er aber aus persönlichen Gründen, die die Composition der Gitterzahlen hinter der Composition der

quadratischen Formen und also die Zerlegung der gewöhnlichen Zahlen in complexe Factoren hinter der Darstellung dieser Zahlen durch die entsprechenden Formen verborgen hat. Uebrigens geht die Idee, zerlegbare Formen (insbes. die binären quadratischen Formen) zu componiren, auf Lagrange zurück.

Ehe wir weiter in der Theorie fortschreiten, wird es zweckmäßig sein, noch einige specielle Fälle unseres Fundamentalsatzes zu betrachten.

1. Sind die beiden zu componirenden Gitter mit dem Hauptgitter identisch, so muß das resultirende Gitter wieder das Hauptgitter sein; denn nach unserem Satze muß das Resultat der Composition wieder ein Stammgitter sein und überdies muß es das Product 1.1 enthalten, da 1 in den beiden zu componirenden Gittern vorkommt. Es muß infolgedessen mit dem Hauptgitter identisch sein. Wir können

also den Satz aussprechen:

Componirt man das Hauptgitter mit sich, so resultirt wieder das Hauptgitter.

Dieser Satz lautet in Bezug auf die Gitterzahlen:

Zwei Hauptzahlen mit einander multiplicirt geben wieder eine Hauptzahl.

Es läßt sich in dieser Fassung auch leicht rein rechnerisch nachweisen. Wir betrachten zunächst den Fall $d \equiv 0 \pmod 4$. Die beiden Hauptzahlen seien:

$$\xi = x + \frac{y\sqrt{d}}{2}, \quad \eta = x - \frac{y\sqrt{d}}{2},$$

$$\xi' = x' + \frac{y'\sqrt{d}}{2}, \quad \eta' = x' - \frac{y'\sqrt{d}}{2}.$$

Dann wird

$$\xi\xi' = \left(x + y\frac{\sqrt{d}}{2}\right)\left(x' + y'\frac{\sqrt{d}}{2}\right) = \left(xx' + \frac{yy'd}{4}\right) + (xy' + yx')$$

$$= x'' + y''\frac{\sqrt{d}}{2}$$

$$\eta\eta' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= x'' - y''\frac{\sqrt{d}}{2}$$

d. h. das Produkt ist wieder eine Hauptgitterzahl, da x'', y'' für alle ganzzahligen Werte von x, x', y, y' gemäß der Voraussetzung $d \equiv 0 \pmod 4$ ebenfalls ganze Zahlen sind.

Ähnlich im Falle $d \equiv 1 \pmod 4$. Sind die zu multiplizierenden Gitterzahlen:

$$\xi = x + y\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\,, \quad \eta = x + y\,\frac{1-\sqrt{d}}{2},$$

$$\xi' = x' + y'\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\,, \quad \eta' = x' + y'\,\frac{1-\sqrt{d}}{2},$$

so ergibt sich durch Multiplikation

$$\begin{aligned}\xi\,\xi' &= \left(x + y\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)\left(x' + y'\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)\\ &= \left[xx' + yy'\cdot\frac{d-1}{4}\right] + (xy' + x'y + yy')\cdot\frac{1+\sqrt{d}}{2}\\ &= x'' + y''\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\,,\end{aligned}$$

womit unsere Behauptung auch in diesem Falle gerechtfertigt ist.

Wir bemerken noch, daß unsere Behauptung vom Standpunkte der Körpertheorie ganz selbstverständlich ist. Wir haben nämlich nur gezeigt, daß das Produkt zweier ganzer Zah-

len des Körpers $V\delta$ wieder eine ganze Zahl desselben Körpers ist.

2. Fst von den beiden zu componi„ renden Gittern das eine das Haupt„ gitter H, das andere ein Nebengitter G, in beliebiger Orientirung, so ergiebt sich durch Composition bei„ der wieder das Nebengitter G in der„ selben Orientirung. Denn das resul„ tirende Gitter muss offenbar, da das Hauptgitter die 1 enthält, das Git„ ter G enthalten und infolgedessen mit ihm identisch sein, da beide dieselbe Discriminante haben.

Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Componirt man ein beliebiges Ne„ bengitter mit dem Hauptgitter, so resultirt dasselbe Nebengitter, u. zw. gleichviel, wie wir uns den Azimuthalfactor ϱ bestimmt denken.

Für die Gitterpunkte lautet der entsprechende Satz:

Multiplicirt man einen Punkt

einer Nebengitters mit einem Punkte der Hauptgitters, so erhält man einen Punkt desselben Nebengitters.

Um die Richtigkeit dieser Sätze rechnerisch nachzuweisen, betrachten wir zunächst wieder den Fall $d \equiv 0 \pmod 4$. Wir haben dann:

$$\xi = x + y\frac{\sqrt{d}}{2}\,, \quad \eta = x - y\frac{\sqrt{d}}{2}$$

$$\xi' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right), \eta = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\right.$$

Das Produkt $\xi\,\xi'$ läßt sich nun schreiben:

$$\xi\,\xi' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x'' + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y''\right)$$

wenn man

$$x'' = xx' - \frac{b}{2}\,yx' - cyy'\,, \quad y'' = xy' + ayx' + \frac{b}{2}\,yy'$$

setzt, d. h. der Punkt $(\xi\,\xi', \eta\eta')$ gehört wieder demselben Nebengitter wie (ξ', η') an, denn x'' und y'' sind für alle ganzzahligen Werte von x, x', y, y' selbst ganze Zahlen, da

im Falle $d \equiv 0 \pmod 4$ auch die Kongruenz $b \equiv 0 \pmod 2$ besteht.

Bei $d \equiv 1 \pmod 4$, wobei gleichzeitig $b \equiv 1 \pmod 2$ ist, erhält man in analoger Weise:

$$\xi\,\xi' = \varphi\left(\sqrt{a}\,x'' + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y''\right), \text{ wo}$$

$$x'' = xx' + \frac{1-b}{2}\,yx' - cyy' \qquad y'' = xy' + ayx + \frac{1+b}{2}\,yy'$$

ist.

Ein spezieller Fall unserer letzten Satzes ist uns von früher her wohl bekannt, wir meinen die <u>Aufstellung der Automorphieen eines Gitters mit Hülfe der Pell'schen Gleichung</u>. Wir bemerkten bereits, daß die Pell'sche Gleichung darauf hinauskommt, die jedesmalige Hauptform $= 1$ zu setzen, also $x^2 - \frac{d}{4}\,y^2 = 1$, bez. $x^2 + xy + \frac{1-d}{4}\,y^2 = 1$. Aus diesen x, y stellten wir uns die Größen:

$$\xi,\ \eta = x \pm y\,\frac{\sqrt{d}}{2}, \text{ resp. } \xi,\ \eta = x + y\,\frac{1 \pm \sqrt{d}}{2}$$

her.

Wir nannten dieselben Einheiten, weil ihre Norm gleich 1 ist. Wir können dieselben nach unserer jetzigen Terminologie als Coordinaten der Einheitspunkte des Hauptgitters bezeichnen, nämlich derjenigen Gitterpunkte, welche den „Abstand" 1 vom 0 besitzen.

Mit den Einheiten ξ, η multiplizirten wir früher die Gitterzahlen ξ', η' eines beliebigen zur Discriminante d gehörigen Gitters. Es zeigte sich, dass dabei ein dem ursprünglichen kongruentes Gitter entstand, dass wir also eine Automorphie des Gitters erhielten. Dieser Umstand erklärt sich jetzt einfach aus dem eben bewiesenen Satze.

Zunächst ist nach unserem Satze klar, dass der Punkt $(\xi, \eta)\cdot(\xi', \eta')$ wieder dem Gitter (ξ', η') angehören muss. Während aber im Allgemeinen durch Multiplication eines Punktes (ξ, η) des Hauptgitters mit den sämmtlichen

Punkten (ξ', η') ein dem Gitter $\xi'\eta'$ eingelagertes Gitter entsteht, dessen einzelne Maschen sich aus mehreren Maschen des ursprünglichen Gitters zusammensetzen, bringt es die Wahl der Punktes (ξ, η) in unserem Falle mit sich, dass wir ein dem ursprünglichen congruenter Gitter erhalten. In der That wird wegen $N(\xi) = 1$ auch $N(\xi\,\xi') = N(\xi')$. Der Abstand der Gitterpunkte von 0 wird also durch die Multiplication der Gitters mit dem Punkte (ξ, η) nicht geändert. Das neue Gitter wird daher dem alten congruent sein, so dass sich in der That eine Automorphie ergiebt. Ist (ξ, η) kein Einheitspunkt, so wird das neue Gitter mit dem alten nur ähnlich sein.

Wir betrachten endlich den Fall conjugirter Stammgitter, bezüglich derer wir den Satz aussprechen:

<u>Zahlen aus conjugirten Gittern geben multiplicirt Hauptzahlen</u>

(vorausgesetzt, dass wir an der früher verabredeten Orientierung conjugirter Gitter festhalten).

Sind die Gitterzahlen aus den richtig orientirten conjugirten Gittern:

$$\xi = \varrho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right),\quad \eta = \frac{1}{\varrho}(\cdots\cdots),$$

$$\xi' = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{-b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)\quad \eta' = \varrho(\cdots\cdots),$$

so ergibt sich

$$\xi\xi' = \left(axx' - \frac{b}{2}xy' + \frac{b}{2}yx' - cyy'\right) + \frac{\sqrt{d}}{2}(xy' + yx'$$

$$= \left[axx' - \frac{b-1}{2}xy' + \frac{b-1}{2}yx' - cyy'\right] + \frac{1+\sqrt{d}}{2}(xy' +$$

Aus dieser Doppelgleichung folgt die Richtigkeit unserer Sätze sowohl für $d \equiv 0 \pmod 4$ (erste Zeile) wie auch $d \equiv 1 \pmod 4$ (zweite Zeile) da die Klammergrößen stets ganze Zahlen sind.

Für die Composition conjugirter Stammgitter folgern wir noch leicht den Satz:

<u>Conjugirte Stammgitter geben componirt das Hauptstammgitter</u>

Denn das resultirende Gitter muss

ein Stammgitter sein und enthält überdies nach dem eben Bewiesenen Hauptzahlen, es muss also das Hauptstammgitter sein.

19. VI. 96. Die von uns begründete Composition der Gitter lassen wir in die symbolische Gleichung zusammen:

$$G \cdot G' = G''.$$

Dieselbe zeigt, dass unsere h Gitter

$$G, G', G'', \ldots G^{(h-1)}$$

ein geschlossenes Ganzes bilden und dass wir bei der Composition immer wieder zu einem unserer h Elemente kommen. Die vorstehende Gleichung ist auch umkehrbar, in dem Sinne, dass wir zu G' und G'' in eindeutiger Weise ein zugehöriges G finden können. Dabei berücksichtigen wir, dass bei der Composition das Hauptgitter G_0 die Rolle der Einheit spielt und dass zwei conjugirte Gitter G und $\overline{G}$ dementsprechend als inverse Elemente angesehen

werden müssen. Wir können nämlich den Satz von pg. 137 in die symbolische Gleichung fassen

$$GG_0 = G \quad \text{oder} \quad G_0 = 1.$$

und den Satz von pg. 142 in die folgende Gleichung:

$$G\bar{G} = G_0 = 1.$$

Zu Folge dessen erhalten wir aus der Compositionsgleichung $GG' = G''$, indem wir rechts und links mit $\bar{G}'$ componiren:

$$G''\bar{G}' = GG' \cdot \bar{G}' = GG_0 = G.$$

Das Gitter G ist also in der That eindeutig durch G' und G'' bestimmt. Endlich berücksichtigen wir, dass die Operation der Multiplication eine <u>commutative Operation</u> ist, so dass

$$GG' = G'G$$

wird. Alle diese Thatsachen fassen wir in die einfache Aussage zusammen:

<u>Ausere h Gitter bilden eine</u>

Gruppe vertauschbarer Elemente.

Die Eigenschaften dieser Gruppe sind u. a. studirt worden von

Schering: Die Fundamentalklassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen, Göttinger Abhandlungen Bd. 14.

und von

Frobenius und Stickelberger: Ueber Gruppen vertauschbaren Elemente Crelle Bd. 86, 1878.

Nebenbei bemerken sie an dem Titel dieser Abhandlungen die Fortschritte, welche der Gruppenbegriff in den letzten Decennien gemacht hat. Während in der früheren Arbeit die specielle Beschaffenheit der Elemente, aus denen die Gruppe besteht, betont wird, abstrahirt die zweite Arbeit hiervon gänzlich und hebt nur ihre Gruppeneigenschaft hervor, wie solches der Allgemeinheit des Gruppenbegriffes in der That besser entspricht.

Wir führen hier eine Reihe einfacher

Sätze an, zu denen die genannten Autoren gelangen, die übrigens ganz einfachen Beweise sollen der Kürze halber fortgelassen werden.

1. Wir greifen irgend einen der h Gitter heraus und komponieren dasselbe mit sich selbst. Dabei muß wegen der Endlichkeit der Gruppenelemente einmal, sagen wir nach k-maliger Composition, die Einheit auftreten. Wir bilden also:

$$G, G^2, G^3, \ldots G^k = 1.$$

Unser erster Satz lautet nun, daß der „Grad" k notwendig ein Teiler von h sein muß.

2. Es könnte sein, daß zufälliger Weise k = h wird. Ein solches Gitter nennen wir ein „erzeugendes Gitter" und bezeichnen dasselbe mit T. Wir können dann die ganze Reihe der Gitter in der Form

$$T, T^2, T^3, \ldots T^h = 1$$

anschreiben.

3. Wenn $k \neq h$ ist, so wird es jeden-falls ein Gitter geben, für welches k einen <u>maximalen Wert</u> hat. Wir schreiben dann zunächst die folgenden k Gitter auf:

$$T, T^2, \ldots T^k = 1.$$

Darauf suchen wir unter den übrigen Gittern dasjenige (T_1) auf, dem der größte hier noch vorkommende Grad (k_1) zukommt. Wir können dann k_1 Gittern die Form geben:

$$T_1, T_1^2, \ldots T_1^{k_1} = 1.$$

Durch Combination dieser k_1 mit den früheren k Gittern ergeben sich $k_1 k$ Gitter

$$T^\alpha T_1^{\alpha_1} \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha \equiv 0, 1, \ldots k-1 \pmod{k} \\ \alpha_1 \equiv 0, 1, \ldots k_1 - 1 \pmod{k_1} \end{array}\right\}.$$

4. Fahren wir so fort, so erhalten wir eine abbrechende Reihe von Gittern

$$T, T_1, T_2 \ldots$$

bez. vom Grade

$$k,\ k_1,\ k_2.$$

Sämmtliche h Gitter stellen sich dann in der Gestalt dar:

$$T^{\alpha} T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \left\{ \begin{array}{l} \alpha \equiv 0, 1, \ldots k-1 \pmod{k} \\ \alpha_1 \equiv 0, 1, \ldots k_1-1 \pmod{k_1} \\ \alpha_2 \equiv 0, 1, \ldots k_2-1 \pmod{k_2} \end{array} \right\}$$

Dabei zeigt sich, dass die Zahlen k nicht nur der Ungleichung genügen:

$$h \geq k \geq k_1 \geq k_2 \geq \ldots,$$

sondern es ist auch in dieser Reihe jede Zahl ein Teiler der vorhergehenden.

5. Sind uns zwei Gitter in der Darstellung gegeben

$$T^{\alpha} T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \ldots$$
$$T^{\beta} T_1^{\beta} T_2^{\beta_2} \ldots,$$

so wird (wegen der Vertauschbarkeit der Elemente) das durch Composition entstehende Gitter erreicht sich dieses sein:

$$\Gamma^{\alpha+\beta}\,\Gamma_1^{\alpha_1+\beta_1}\,\Gamma_2^{\alpha_2+\beta_2}\ldots.$$

Hier wird man die Exponenten $\alpha+\beta$, $\alpha_1+\beta_1$, ... natürlich immer mod k, bez. mod k_i auf ihre kleinsten Reste reduciren.

Die Composition der Gitter vervandelt sich in eine Addition der Exponenten α und β.

6. Sollen die beiden vorhergenannten Gitter insbesondere conjugirt sein, so muss bei der Composition die Einheit entstehen. Es muss also allgemein sein

$$\alpha_i \equiv -\beta_i \pmod{k_i}.$$

7. Dementsprechend lassen sich die Anepsgitter leicht characterisiren als solche Gitter, deren Quadrat die Einheit ist. Soll also

$$\Gamma^{\alpha}\,\Gamma_1^{\alpha_1}\,\Gamma_2^{\alpha_2}\ldots$$

speciell ein Anepsgitter vorstellen, so müssen die Congruenzen erfüllt sein:

$$\left|\begin{array}{l} 2\alpha \equiv 0 \pmod{k} \\ 2\alpha_1 \equiv 0 \pmod{k_1} \\ \text{- - - - - - - -} \end{array}\right.$$

Wir fragen nach der Zahl der Anzeigegitter. Diese hängt offenbar davon ab, wie viele der Zahlen k_i gerade sind. Ist k_i ungerade, so hat die Congruenz

$$2\alpha_i \equiv 0 \pmod{k_i}$$

nur die eine Lösung $\alpha_i = 0$. Ist aber k_i gerade, so giebt es zwei mod k_i incongruente Lösungen, nämlich

$$\alpha_i = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_i = \frac{k_i}{2}$$

Hiernach beträgt die Zahl der Anzeigegitter wenn τ die Anzahl der in der Reihe $k, k_1, k_2 \ldots$ vorkommenden geraden Zahlen ist, einfach 2^τ.

Wir erläutern diese Dinge durch einige Zahlenbeispiele, welche wir aus den Tabellen von Gayley (vergl. ges. Werke Bd V. pg. 141 ff.)

zusammenstellen. Wir wählen dabei Gitter von negativer Discriminante aus, weil uns diese wegen der Anwendung auf die Theorie der elliptischen Functionen besonders wichtig sind. Es sei zunächst

1. $d = -356 = -4 \cdot 89$.

Die Classenanzahl h ergiebt sich aus der Anzahl der reducirten Formen und diese aus der Anzahl der Zahlentripel a, b, c, für welche

$$|b| \leq a \leq c, \quad -356 = b^2 - 4ac.$$

Man findet die folgenden reducirten Formen:

a		b	c
1		0	89
2		2	45
3	$\pm$	2	30
5	$\pm$	2	18
6	$\pm$	2	15
7	$\pm$	6	14
9	$\pm$	2	10

Die beiden ersten Formen charakteri-

stiren sich als Anfangsformen, speciell die erste als Hauptform. Die übrigen sind paarweise als conjugirte Formen zusammengeordnet. Die Zahl der reducirten Formen und daher die Classenanzahl beträgt 12.

Bei der Composition wollen wir mit der Form

$$T = (3, \pm 2, 30)$$

beginnen und die successiven Potenzen derselben bilden. Nach unserer obigen Regel für die Composition der zu den Formen (a, b, c) und (a', b', c') gehörigen Gitterzahlen, haben wir den größten gemeinsamen Teiler α der Zahlen

$$a = 3, \quad a' = 3, \quad \frac{b + b'}{2} = 2$$

zu suchen, welcher gleich 1 ist. Es wird also

$$\alpha = 3, \quad \alpha' = 3, \quad \beta = 2.$$

Daraus folgt $a'' = 9$. Zur Berechnung von b'' haben wir die Congruenzen

$$b'' \equiv 2 \pmod 6$$
$$b'' \equiv 2 \pmod 6$$
$$4b'' \equiv 4 \quad (1-89) \pmod{36}, \text{ oder}$$
$$b'' \equiv -88 \pmod 9 \text{ oder endlich}$$
$$b'' \equiv +2 \pmod 9.$$

Die gemeinsame Lösung dieser drei Congruenzen ist offenbar

$$b'' = 2 \text{ oder allgemeiner } b'' = 2 + 18m.$$

Die dem Gitter T^2 entsprechende Form wird also

$$(9, 2, 10),$$

welche sich zufälliger Weise unter unseren reducirten Formen vorfindet.

Wir gehen darauf zu T^3 und bilden zu dem Zwecke:

$$(9, 2, 10)\,(3, 2, 30).$$

Jetzt haben wir

$$a = 9, \quad a' = 3, \quad \frac{b+b'}{2} = 2$$

also $\mu = 1$ und

$$\alpha = 9, \quad \alpha' = 3, \quad \beta = 2, \quad \alpha'' = 27.$$

Die Congruenzen zur Bestimmung von b'' sind

$$b'' \equiv 2 \pmod 6$$
$$b' \equiv 2 \pmod{18}$$
$$b'' \equiv 20 \pmod{27},$$

woraus wir schliessen

$$b'' = 20 \text{ bez. } b'' = 20 + m.\ 54.$$

Die dem Gitter T^3 entsprechende Form wird also

$$(27, 20, 7) = 27x^2 + 20xy + 7y^2$$

Diese Form ist noch nicht reducirt. Sie wird es aber mittelst der uni„ modularen Substitution

$$x = -y'$$
$$y = x' + y'.$$

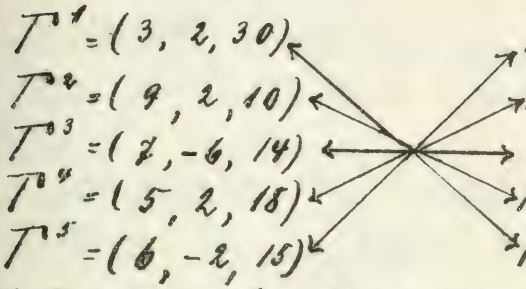
Wir haben nämlich

$$27x^2 + 20xy + 7y^2 = 7x'^2 + (-20+14)x'y' +$$
$$+ (27 - 20 + 7)y'^2 = (7, -6, 14).$$

Fahren wir in dieser Weise fort so erken„ nen wir, dass wir successive un„ sere 12 Formen aus unserem Ausgangs-gitter T ableiten können. Es liegt hier also der pg. 146 sub 2 hervorgehobene beson„ dere Fall vor. Die Reihenfolge,

in der unsere 12 reducirten Formen enthalten werden, ist diese

$T^0 = (1, 0, 89)$ $\quad$ $T^6 = (2, 2, 45)$



Uebrigens bewähren sich noch die sub 7 und 8 angegebenen Regeln über die conjugirten – und die Ancepsgitter. In der vorstehenden Reihe sind je zwei solcher Gitter T^α und T^β conjugirt, für welche $\alpha + \beta = h = 12$, während die Gitter T^0 und T^6 Ancepsgitter sind, da ihre Exponenten der Congruenz $2\alpha \equiv 0 \pmod{12}$ genügen. Die Zahl der Ancepsgitter beträgt, wie es sein muss, $2^\tau = 2$, indem die in unserem Fall allein vorhandene Zahl $k = 12$ eine gerade Zahl ist.

Als zweites Beispiel wählen wir

2. $d = -971 = -4 \cdot 243$.

Die Classenanzahl ist hier $h = 9$. Die vorhandenen neun reducirten Formen schreiben wir sogleich nach ihrer Erzeugungsweise in die Tabelle zusammen:

$$T^0 = (1, 0, 243),\ T^0T_1^1 = (4, 2, 61),\ T^0T_1^2 = (4, -2, 61)$$
$$T^1 = (7, 6, 36),\ T^1T_1^1 = (13, -4, 19),\ T^1T_1^2 = (9, -6, 28)$$
$$T^2 = (7, -6, 36),\ T^2T_1^1 = (9, 6, 28),\ T^2T_1^2 = (13, 4, 19).$$

Hier haben wir zwei erzeugende Gitter T und T_1 mit den Exponenten $k = 3$ und $k_1 = 3$. Wiederum sind diejenigen Gitter paarweise conjugirt, für welche

$$\alpha + \beta \equiv 0 \pmod 3 \text{ und gleichzeitig}$$
$$\alpha_1 + \beta_1 \equiv 0 \pmod 3$$

ist. Da die Anzahl ε der in der Reihe $k = 3$, $k_1 = 3$ vorkommenden geraden Zahlen 0 beträgt, so wird die Anzahl der Invariantgitter $2^0 = 1$. In der That giebt es hier keine andere An-

cipsform als die Hauptform.

25. VI. 96. Wir benutzen jetzt die Gleichung

$$G = \Gamma^{\alpha} \Gamma_1^{\alpha_1} \ldots$$

um die Orientirung unserer h Gitter G definitiv festzulegen. Bisher haben wir nur die Lage des Hauptgitters und die gegenseitige Lage zweier conjugirter Gitter bestimmt. Das Entsprechende soll jetzt allgemein für jedes Gitter geschehen. U. zw. wollen wir es so einrichten, daß der folgende Satz Gültigkeit bekommt:

Zwei Punkte aus orientirten Gittern geben multiplicirt wieder einen Gitterpunkt in richtiger Orientirung.

Wir beginnen mit dem erzeugenden Gitter Γ. Wenn wir dieses k-mal mit sich selbst componiren, so ergiebt sich, wie wir sahen, das Hauptgitter. Dem soeben genannten Princip entsprechend müssen wir also Γ so orientiren, daß

Γ^k das Hauptgitter in der früher verabredeten Orientirung ergiebt. Eben so verfahren wir mit $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots\ldots$ Alle übrigen Gitter aber orientiren wir in der Weise, wie sie aus $\Gamma, \Gamma_1, \ldots$ nach unserer obigen Compositionsformel entstehen. — Dann ist unsere Absicht vollkommen erreicht. In der That entsteht durch Multiplication aus zwei Punkten der Gitter $\Gamma^\alpha \Gamma_1^{\alpha_1} \ldots$ bez. $\Gamma^\beta \Gamma_1^{\beta_1} \ldots$ ein Punkt aus dem Gitter $\Gamma^{\alpha+\beta} \Gamma_1^{\alpha_1+\beta_1}$ —, letzteres in derjenigen Lage genommen die wir diesem Gitter ohnehin zuge-wiesen haben.

Wir mögen noch bemerken, dass unsere frühere Verabredung über die conjugirte Lage conjugirter Gitter in unserer jetzigen Orientirungsregel enthalten ist. Da nämlich zwei conjugirte Gitter die Form haben $\Gamma^\alpha \Gamma_1^{\alpha_1} \ldots$ bez. $\Gamma^{-\alpha} \Gamma_1^{-\alpha_1} \ldots\ldots$ so setzen sich ihre Azimuthalfactoren aus lauter reciproken Betrag,

teilen zusammen. Sie liegen also nach unserer jetzigen Regel von selbst symmetrisch gegen die u- und v- Axe.

Die so erhaltene Figur, in der unsere h Gitter in bestimmter Weise gelagert sind, nennen wir <u>die Normalfigur</u>; sie liegt allen späteren Betrachtungen, in's Besondere der Theorie der singulären elliptischen Gebilde zu Grunde.

Auf die Herstellung der Normalfigur im Einzelnen müssen wir noch näher eingehen. Wir müssen nämlich angeben wie wir es erreichen, daß $T^k T_1^{k_1} \ldots$ gerade mit dem Hauptgitter zusammenfällt. Wir wollen dabei der Deutlichkeit wegen den Fall einer positiven und negativen d getrennt behandeln und mit den negativen Werten von d beginnen.

<u>1. $d < 0$</u>. Wir nehmen die Fälle $d = -3$ und $d = -4$ vorweg. Die Gitterzahlen ξ, η des Hauptgitters

haben die Form

$$d = -3 : x \pm \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} y$$

$$d = -4 : x \pm i y .$$

Es sind dieses die allereinfachsten Beispiele von ganzen algebraischen Zahlen eines quadratischen Zahlenkörpers. Die Bedingungsgleichungen der reducirten Formen zeigen nun sofort, daß in diesen Fällen die Classenanzahl $k = 1$ wird. Es sind also keine Nebengitter vorhanden, die ganze Normalfigur reducirt sich auf die Figur des Hauptgitters. Umgekehrt also dürfen wir unsere Normalfigur für $|d| > 4$ als die naturgemäße Verallgemeinerung der einfachen Gitterfiguren im Falle $d = -3$ und $d = -4$ ansehen.

Wir überlegen nun wie im Falle $|d| > 4$ die Orientirung der Nebengitter im Einzelnen vorzunehmen ist. Es handelt sich dabei um die Bestimmung der

(reellen) Größe φ in dem Ausdrucke für eine allgemeine Gitterzahl von Γ.

$$\varepsilon^{i\varphi}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right),$$

oder auch in dem specielleren Ausdrucke

$$\varepsilon^{i\varphi\sqrt{a}},$$

welcher eine Basiszahl des Gitters Γ bedeutet.

Componiren wir das Gitter Γ k-mal mit sich selbst, so entsteht aus dem letztgenannten Punkte:

$$\varepsilon^{ki\varphi\sqrt{a}^{\,k}}.$$

Der zugehörige Gitterpunkt gehört aber dem Hauptgitter an und findet sich in diesem etwa unter dem Azimuthe Φ vor. Dabei haben wir die Automorphien des Gitters Γ einerseits, des Hauptgitters andrerseits zu beachten.

Wenn, wie wir voraussetzen, $d < -4$ ist, so besteht die ein-

zige vorhandene Automorphie in einer Drehung des Gitters durch den Winkel π. Es findet sich daher der fragliche Punkt $e^{ki\varphi}\sqrt{a}^k$ in dem Hauptgitter außer unter dem Azimuthe Φ nur noch unter dem Azimuthe $\Phi + \mu\pi$ vor, wo μ irgend eine ganze Zahl bedeutet. Soll also $e^{ki\varphi}\sqrt{a}^k$ direct in einen correspondirenden Punkt des Hauptgitters übergehen, so muß

$$k\varphi = \Phi + \mu\pi.$$

oder

$$\varphi = \frac{\Phi + \mu\pi}{k}$$

gewählt werden. Andrerseits können wir uns darauf beschränken, μ die zu k incongruenten Werte $\mu = 0, 1, 2, \ldots k-1$ durchlaufen zu lassen, um alle möglichen mit unserer obigen Festsetzung verträglichen Orientirungen von l' zu erhalten. Denn auch das

Gitter T' besitzt doch die vorher genannte Automorphie, so daß zwei Orientierungen, welche sich nur um ein Vielfaches von π unterscheiden, als identisch gelten müssen. In Folge dessen bekommen wir gerade K zulässige Orientierungen des Gitters T'. Von diesen greifen wir irgend eine heraus und legen sie unserer Normalfigur zu Grunde.

Dasselbe machen wir mit dem erzeugenden Gitter T_1. Dieses geht durch K_1-malige Composition in das Hauptgitter über. Demnach müssen wir das Azimuth φ_1 dieses Gitters so wählen, daß

$$K_1 \varphi_1 = \Phi_1 + \mu_1 \pi$$

oder

$$\varphi_1 = \frac{\Phi_1 + \mu_1 \pi}{K_1}$$

wird. Für T_1 ergeben sich also K_1 zulässige Lagen. Ebenso für T_2 K_2 Lagen etc.

Im Ganzen ergeben sich so

k k_1, k_2 ..... = h verschiedene Möglichkeiten unsere Normalfiguren zu entwerfen. Indem wir bei der Orientirung der Gitter T, T_1, ... den ganzen Zahlen u willkürliche, aber bestimmte Werte beilegen, greifen wir unter den h Möglichkeiten eine bestimmte, aber beliebige heraus und halten an dieser für die Folge fest. Die nunmehr definirten Nebengittezahlen mögen wir noch arithmetisch charakterisiren. Sie gehören nicht direct dem Körper $\sqrt{d}$ an, wohl aber je einem Nebenkörper derselben, welcher dadurch entsteht, daß wir zu $\sqrt{d}$ bez. die Irrationalitäten

$$\sqrt{a}\, e^{i\frac{\Phi + u\pi}{k}}, \qquad \sqrt{a_1}\, e^{i\frac{\Phi_1 + u_1\pi}{k_1}}, \ldots$$

adjungiren. In der That lassen sich alle Gitterzahlen von T rational durch $\sqrt{d}$ und $\sqrt{a}\, e^{i\frac{\Phi + u\pi}{k}}$, alle Gitterzahlen von T_1 durch $\sqrt{d}$ und $\sqrt{a_1}\, e^{i\frac{\Phi_1 + u_1\pi}{k_1}}$ etc. auf-

bauen.

Ueberdies sind alle Nebengitterzahlen algebraische ganze Zahlen. Beispielsweise liefert jeder Punkt von Γ_1 in die k^{te} Potenz erhoben, einen Punkt des Hauptgitters. Da nun die Zahlen des Hauptgitters einer quadratischen Gleichung genügen, deren erster Coefficient 1 ist, so befriedigen die Zahlen von Γ_1 eine Gleichung $2k^{ten}$ Grades, deren erster Coefficient gleichfalls die Einheit ist.

Wir fügen noch einen Hülfssatz hinzu der uns später nützlich sein wird. Wir behaupten:

Ein Ausdruck von der Form der Nebengitterzahlen, in welchem $x = x_0$ und $y = y_0$ als rational vorausgesetzt werden, kann nur dann eine ganze algebraische Zahl sein, wenn x_0 und y_0 ganze Zahlen sind.

Zum Beweise denken wir uns den fraglichen Ausdruck

$$1) \quad \varphi\left(\sqrt{a}\, x_0 + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\, y_0\right)$$

mit den Zahlen des zu dem Tripel (a, b, c) conjugirten Tripels multiplizirt, d. h. mit

$$2) \quad \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\, x + \frac{-b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\, y\right),$$

wo x und y beliebige ganze rationale Zahlen bedeuten sollen. Bei der Multiplikation ergiebt sich ein Ausdruck von der Form der Hauptzahlen, nämlich, je nachdem $d \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 4$ ist:

$$3) \quad \xi + \eta\,\frac{\sqrt{d}}{2} \quad \text{bez.} \quad \xi + \eta\,\frac{1+\sqrt{d}}{2};$$

hierbei wird nach pg. 142.

$$4) \quad \eta = x y_0 + y x_0$$

Nun setzen wir voraus, daß 1) eine ganze algebraische Zahl ist. Durch Multiplikation mit dem Ausdrucke 2), welcher eo ipso eine ganze algebraische Zahl darstellt, entsteht wieder eine ganze algebraische Zahl. Die Ausdrücke 3) sind daher ganze Zahlen des Körpers $\sqrt{d}$. Infolgedessen müssen ξ und η

ganze rationale Zahlen sein, u. zw. für alle ganzzahligen Werte von x und y. Daraufhin zeigt aber die Gleichung 4), daß auch x_0 und y_0 ganze Zahlen sein müssen. Setzen wir nämlich etwa $x = 1$, $y = 0$ bez. $x = 0$, $y = 1$, so sehen wir, daß y_0 bez. x_0 einen ganzzahligen Wert besitzen.

2. $d > 0$. Bei positiver Diskriminante liegen die Dinge ganz ähnlich, nur drücken sie sich hier etwas anders aus. Der Unterschied liegt darin, daß die Automorphiefaktoren ε hier reelle Zahlen vorstellen und daß jetzt stets nicht-triviale Automorphismen vorhanden sind. Letztere ergeben sich, wie wir wissen aus der kleinsten Lösung (t_0, u_0) der Pell'schen Gleichung in der Form

$$\frac{(t_0 + u_0\sqrt{d})}{2}$$

Da die Automorphismen nur von der Größe d abhängen, so sind

sie dem Hauptgitter und den Nebengittern gemeinsam. Geometrisch konnten wir sie als Drehungen um beliebige Multipla des Pell'schen Winkels

$$i \log \frac{(t_0 + u_0 \sqrt{d})}{2}$$

auffassen, welche unsere Gitter mit sich zur Deckung bringen. Der Maßbestimmung liegt dabei, vermöge unserer obigen geometrischen Verabredungen, das Linienpaar $u^2 - v^2 = 0$ zu Grunde.

Bei der Frage nach der richtigen Orientirung von Γ handelt es sich nun um die Bestimmung der reellen und, wie wir hinzufügen können, auch positiven Größe ϱ in dem allgemeinen Ausdrucke der Gitterzahlen von Γ:

$$\varrho \left(\sqrt{a}\, x + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\, y \right).$$

(Ein Vorzeichenwechsel von ϱ würde die Lage des Gitters nicht ändern, sondern nur bedeuten, daß wir in einem anderen

Sektor der Linien $u \pm v$ operiren).
Im Besonderen genügt es, den Ba-
sispunkt $x = 1$, $y = 0$, d. h. den Punkt
$\zeta \sqrt{a}$
richtig zu legen, woraus dann die
richtige Orientirung der ganzen Git-
ters von selbst folgt.
Durch k-malige Composition von
T ergiebt sich das Hauptgitter. Möge
nun ein Punkt des Hauptgitters, wel-
cher hierbei dem durch Potenzirung aus
$\zeta \sqrt{a}$ entstehenden Punkte $(\zeta^k \sqrt{a}^k)$
entspricht, unter dem Pseudo-Axi-
muthe P orientirt sein (wo wir
P wieder als positive Zahl voraus-
setzen). Es giebt dann noch unend-
lich viele andere Punkte des Haupt-
gitters, welche demselben Punkte ent-
sprechen und deren Pseudo-Azimu-
the durch die Formel

$$P\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^u$$

bestimmt sind. die Einheit $\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}$
setzen wir hier gleichfalls als posi-

tive Größe voraus. Soll nun bei der Composition das Gitter T direct in das Hauptgitter übergehen, so müssen wir haben

$$\varrho^k = P\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^u$$

oder

$$\varrho = P^{\frac{1}{k}}\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{u/k}$$

Hier durchläuft u alle ganzen Zahlen. Es genügt aber wieder, nur k modulo k incongruente Werte von u zu berücksichtigen, etwa die Werte $u = 0, 1, \ldots k-1$; in der That geben zwei modulo k congruente Werte von u zu zwei Werten von ϱ Anlass, welche sich lediglich um eine ganze Potenz von $\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}$ unterscheiden, die entsprechenden Gitter T sind aber ohne weiteres identisch. Der an sich mehrdeutige Ausdruck $P^{1/k}$ ist durch unsere Verabredung, nach der ϱ eine reelle und pos.

tive Zahl sein soll, eindeutig bestimmt. Hiernach liefert unsere Formel wiederum k zulässige Orientirungen der Gitters T.

Ebenso finden wir natürlich für die Gitter $T_1, T_2 \ldots$ $k_1, k_2 \ldots$ mögliche Lagen. Unsere Normalfigur läßt sich daher auch im Falle $d > 0$ auf $h = k\, k_1, k_2 \ldots$ Arten entwerfen. Eine von diesen Arten wird für das Folgende willkürlich ausgewählt.

Auch war wir oben über den arithmetischen Charakter der Nebengitterzahlen sagten, gilt unverändert für den Fall einer negativen Discriminante.

Wir resumiren nochmals die Eigenschaften unserer Normalfigur, indem wir sagen:

Unsere Normalfigur besteht aus h Gittern. Je zwei conjugirte Gitter liegen bezüglich der Coordinatenaxen symmetrisch gegen das Hauptgitter. Das Haupt-

Gitter selbst ebenso wie die Antipo-Gitter liegen symmetrisch gegen sich selbst. Gegenüber der Multiplikation bilden die Punkte der Normalfigur ein abgeschlossenes Ganze, indem je zwei Punkte mit einander multiplicirt einen dritten Punkt ergeben, welcher wieder der Normalfigur angehört.

Die Teilbarkeitsgesetze im Gebiete der orientirten Gitterzahlen.

Wir geben nun unserer Betrachtung eine neue Wendung. Wir wollen nämlich das durch die Normalfigur definirte Zahlenmaterial auf die Teilbarkeits-gesetze untersuchen.

Das allgemeine Resultat, zu welchem wir gelangen werden, ist dieses:

Die Teilbarkeitsgesetze der gewöhnlichen Zahlentheorie (eindeutige Zerlegung in Primfactoren) behalten in unserem Gebiete ihre unveran-

derte Gültigkeit.

Wir erinnern zunächst kurz an die Teilbarkeit im gewöhnlichen Zahlengebiete.

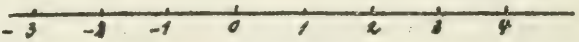
Man nennt eine ganze Zahl teilbar durch eine zweite, wenn der Quotient wieder eine ganze Zahl ist. Man bezeichnet ferner als Einheiten solche Zahlen, durch welche die 1 teilbar ist und als Primzahlen solche, welche außer durch sich selbst nur durch Einheiten geteilt werden können. In dem gewöhnlichen Zahlengebiete giebt es nur zwei Einheiten, nämlich die Zahlen $+1$ und -1.

Der Fundamentalsatz der gewöhnlichen Zahlentheorie besagt nun:

Jede ganze Zahl m läßt sich auf eine und nur auf eine Weise in ein Product von Primzahlen zerlegen, wobei natürlich Einheiten in beliebiger Weise den einzelnen Factoren hinzugefügt

werden können, wenn nur das Produkt derselben immer gerade + 1 ist.

Das gewöhnliche Zahlengebiet



mögen wir etwa gleichfalls geometrisch auffassen als ein <u>Gitter von einer Dimension</u>. Dadurch wird die Analogie mit unserem jetzigen Zahlengebiete klar. Wir haben jetzt nicht ein <u>eindimensionales</u>, sondern ein <u>zweidimensionales</u> Gebiet zu betrachten und in diesem nicht <u>ein</u> Gitter, sondern eine <u>endliche Anzahl</u> von Gittern. Gleichzeitig soll hiermit angedeutet werden, daß wir bei der Verallgemeinerung der gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze bei dem zweidimensionalen Gebiete nicht stehen zu bleiben brauchen, sondern auch drei-dimensionale, vier-dimensionale Gitter etc. betrachten können.

Wir übertragen nun die Definitionen der gewöhnlichen Zahlentheo-

wie auf unser zweidimensionales Gebiet. Dabei werden wir, strenge genommen, „Punkt" statt „Zahl" sagen müssen.

1. Ein Punkt unseres Zahlengebietes heisst teilbar durch einen anderen, wenn der Quotient beider ein ganzzahliger Punkt ist, (d. h. ein Punkt, dessen Coordinaten ganze algebraische Zahlen sind).

2. Als „Einheitspunkte" bezeichnen wir solche Punkte, durch welche der Punkt (1, 1) teilbar ist. Die Einheitspunkte sind allgemein gegeben durch die Formel

$$\varepsilon = \left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^u \qquad \bar{\varepsilon} = \left(\frac{t_0 - u_0\sqrt{d}}{2}\right)^u,$$

wo t_0 und u_0 bestimmte ganzzahlige Lösungen der Pell'schen Gleichung bedeuten.

Wie wir wissen, giebt es bei positivem d unendlich viele Einheitspunkte, bei negativem d nur eine endliche Anzahl.

3. Wir nennen „Primpunkte" solche

the Punkte $(\bar{\pi}\ \bar{\bar{\pi}})$, welche durch keine anderen Punkte teilbar sind, also durch die Einheitspunkte und durch sich selbst.

4. Zwei Punkte heissen <u>relativ prim</u>, wenn es ausser den Einheitspunkten keine Punkte giebt, die in beiden aufgehen.

5. Ein Punkt (ξ, η) heisst der grösste gemeinsame Teiler zweier Punkte (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), wenn die Punkte

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi}\ \frac{\eta_1}{\eta}\right), \left(\frac{\xi_2}{\xi}\ \frac{\eta_2}{\eta}\right)$$

ganzzahlige relativ prime Punkte sind.

Nachdem diese Definitionen vorausgeschickt sind, können wir dazu übergehen, die elementaren Rechenoperationen für unsere Gitterzahlen zu studiren. Wir betrachten

<u>1. Addition und Subtraction.</u>

Bezüglich dieser Operationen können wir nur das negative Resultat wiederholen, das wir bereits pag. 119 ausgesprochen haben,

dass wir nämlich bei Anwendung derselben im Allgemeinen unseren Zahlencomplex verlassen. Wenn wir also an der Beschränkung festhalten, dass die vorzunehmenden Operationen immer wieder auf Punkte der Normalfigur führen, so sind Addition und Subtraction von Gitterpunkten nicht gestattet, abgesehen von der selbstverständlichen Annahme, dass die Punkte <u>derselben</u> Gitter angehören.

2. <u>Multiplication</u>. Die Operation ist im Gegensatz zu den beiden eben genannten uneingeschränkt ausführbar, d. h. wir bekommen durch Multiplication zweier beliebiger Punkte unserer Normalfigur immer wieder einen Punkt derselben, wie wir bereits eingehend nachgewiesen haben.

3. <u>Division</u>. Bezüglich der Division der Gitterpunkte gilt der folgende Satz:

<u>Ist ein Gitterpunkt durch einen</u>

anderen teilbar, so ist der Quotient wieder ein Gitterpunkt.

Zu dem Beweise der folgenden Sätze bemerken wir ein für allemal, daß wir immer nur die auf die eine Gitterzahl (ξ) bezüglichen Gleichungen hinschreiben wollen, während wir in Gedanken durchaus an der Auffassung festhalten, daß jedem Gitterpunkte zwei Coordinaten (ξ, η) zugehören.

Es sei die Zahl ξ' aus dem Gitter $\mathfrak{G}'$ durch die Zahl ξ aus dem Gitter $\mathfrak{G}$ teilbar. Wir haben dann den Quotienten $\frac{\xi'}{\xi}$ zu betrachten, der nach Voraussetzung eine ganze algebraische Zahl ist. Um demselben nun zur besseren Beurteilung einen rationalen Nenner zu geben, erweitern wir ihn mit der zu ξ conjugirten Zahl $\overline{\xi}$. Ist $\xi\overline{\xi} = r$, wo r eine ganze rationale Zahl bedeutet, so ist

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi'\overline{\xi}}{r}$$

Nun liegt $\bar{\xi}$ in dem zu $\mathfrak{F}$ conjugirten Gitter $\bar{\mathfrak{F}}$, also $\xi'\bar{\xi}$ in dem Gitter $\mathfrak{F}'\bar{\mathfrak{F}}$; es sei etwa:

$$\xi'\bar{\xi} = \varrho\left(\sqrt{a}\, x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\, y_0\right).$$

Dann ist

$$\frac{\xi'}{\xi}\cdot\frac{\xi'\bar{\xi}}{r} = \varrho\left(\sqrt{a}\cdot\frac{x_0}{r} + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{y_0}{r}\right).$$

Da aber $\frac{\xi'}{\xi}$, wie wir vorausgesetzt haben, eine ganze algebraische Zahl sein soll, müssen nach unserem Hülfssatze pag. 165 auch $\frac{x_0}{r}$, $\frac{y_0}{r}$ ganze rationale Zahlen sein, d. h. auch $\frac{\xi'\bar{\xi}}{r}$ oder $\frac{\xi'}{\xi}$ liegt in dem Gitter $\mathfrak{F}'\bar{\mathfrak{F}}$.

4. Eindeutige Zerlegung in Primpunkte.

Wir können jetzt dazu übergehen, unsere Betrachtungen über die Gitterpunkte zu krönen, indem wir folgenden Fundamentalsatz beweisen:

Sofern wir von der willkürlichen Wahl hinreichend enger Einheit

punkte absehen, läßt sich irgend ein Gitterpunkt unserer Normalfigur nur auf eine bestimmte Weise in Primpunkte zerlegen.

Den Beweis dieses Satzes führen wir in derselben Weise, wie es in der elementaren Zahlentheorie geschieht. Hier stützt man sich auf den Algorithmus der Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen. Dementsprechend wollen wir uns auch hier fragen: Wie finden wir den größten gemeinsamen Teiler zweier beliebig gegebener Gitterzahlen ξ und ξ'?

Dabei wollen wir an die hergebrachte Terminologie anknüpfen. Diese ist nur vom Standpunkte der historischen Entwickelung aus zu verstehen. Ursprünglich beschäftigte man sich ausschließlich mit den Zahlen des Hauptgitters, um so mehr, als diese in den einfachsten Fällen $d = -3$ und $d = -4$ zugleich die allgemeinen

sten Gitterzahlen darstellen. Diese Zahlen nannte man wirkliche Zahlen. Bei der Behandlung der höheren Fälle zeigte sich aber, daß man mit diesen Zahlen nicht auskommt, sondern auch die Zahlen der Nebengitter hinzunehmen muß, wenn man die eindeutige Zerlegbarkeit in Primfactoren aufrecht erhalten will; diese Nebengitterzahlen nannte man im Gegensatz ideale Zahlen.

Eine neue Auffassung wurde in diesen Teil der Zahlentheorie durch Dedekind hineingetragen. Dedekind bemerkte, daß man die Betrachtung dennoch auf das Hauptgitter beschränken kann, daß man nämlich jeder Nebenzahl vorzugeben ein Bildgitter entsprechen lassen kann, welches in dem Hauptgitter enthalten ist. Dieser Bildgitter erzeugen wir auf folgende Weise. Wir multiplizieren die Nebenzahl ξ mit allen Zahlen des conjugir-

ten Gitters. Dadurch erhalten wir nach Satz pag. 182 die Exponenten eines Gitters, welches dem Hauptgitter eingelagert ist. Wir bemerken, daß dasselbe dem oben benutzten konjugirten Gitter ähnlich ist, es entsteht nämlich dadurch, daß wir jenes in einem bestimmten Verhältnisse vergrößern und um einen gewissen (durch den Azimuthalfactor von ξ gegebenen) Winkel verdrehen.

Den Inbegriff der ξ-Coordinaten dieses Gitters nennt Dedekind ein „Ideal"

" Diese Terminologie drückt eigentlich, dem Wortlaute nach, das Umgekehrte aus von dem, was sie ausdrücken sollte. Wenn man sich überhaupt auf den Standpunkt stellen will, daß die Zahlen des Hauptgitters allein wirklich, die der Nebengitter ideal sind, so müßte man doch unser Bildgitter, welches die ideale Zahl realisiren soll und welcher ganz aus „ wirklichen Zahlen"

besteht, eher ein „Real" nennen. Dieser Widerspruch zwischen Ausdruck und Sinn wird besonders fühlbar, wenn diese Zahl ξ ein Besonderen einer Kantzahl ist. Man wird der Gleichförmigkeit wegen auch diesen Zahlen ein Bildseiten entsprechen lassen. Wir haben dann ein reales Gegenbild einer schon an sich realen Größe. Trotzdem wird ein solcher Zeiger „Hauptideal" genannt, wodurch der Anschein erweckt wird, als ob ein solches Zeichen besonders wenig real wäre.

Wie dem auch sei, jedenfalls werden wir die Terminologie und noch in höheren Maße den Gedankengang der Dedekind'schen Theorie für unsere Zwecke verwenden. Um dem Dedekind'schen „Ideal" näher zu kommen, können wir für „Bildgitter" etwa Idealgitter sagen.

Das Erste, was wir jetzt näher zu untersuchen haben, ist

<u>die Beziehung zwischen den Zeitenzahlen und Idealgittern.</u>

Wir werfen in dieser Hinsicht zwei Fragen auf:

1. Ist durch ein gegebenes Idealgitter eine zugehörige Gitterzahl bestimmt?

2. Ist durch eine gegebene Gitterzahl ein zugehöriges Idealgitter bestimmt?

Ad 1. Die Antwort auf die erste Frage lautet, dass das Idealgitter nicht völlig eine bestimmte Gitterzahl charakterisirt, dass nämlich alle nur durch Einheiten verschiedenen Punkte unserer Figur als Bildgitter dasselbe Idealgitter liefern.

Sei nämlich J ein Idealgitter, dem die Gitterzahl ξ entspricht, so dass

$$J = \xi . G$$

ist, wo G ein Gitter unserer Normalfigur bedeutet.

Wir fragen, giebt es noch eine andere Gitterzahl ξ' derart, dass auch

$$J = \xi' . G'$$

ist, wo Γ' wiederum ein Gitter unserer Normalfigur bedeutet.

Hier können wir nun zunächst behaupten, dass die Gitter Γ und Γ' identisch sein müssen. Da sie nämlich durch Multiplikation mit ξ, resp. ξ', d. h. durch Ausübung von Ähnlichkeits-transformationen, in dasselbe Gitter Γ übergehen, so müssen sie jedenfalls ähnlich sein. Da aber beide unserer Normalfigur angehören sollen, müssen auch die Inhalte ihrer Fundamentalparallelogramme gleich sein, d. h. sie müssen überhaupt identisch sein.

Die beiden Ausdrücke

$$\xi\,\Gamma \quad \text{und} \quad \xi'\,\Gamma$$

stellen nun dasselbe Gitter dar, es muss daher der eine aus dem anderen durch eine Automorphie, d. h. Multiplikation mit einer Einheit ε hervorgehen, d. h. es muss

$$\xi'\,\Gamma = \varepsilon\,\xi\,\Gamma \text{ sein, oder } \xi' = \varepsilon\,\xi\,.$$

Dies Resultat können wir so in Worte fassen:

Durch ein gegebenes Idealgitter ist die Gitterzahl ξ nur bis auf hinzutretende Einheitsfactoren bestimmt.

Ad 2. Unsere zweite Frage müssen wir bejahen. Wir werden nämlich sogleich für das zu einer Gitterzahl gehörige Idealgitter eine Eigenschaft kennen lernen, vermöge deren dasselbe umzweideutig festgelegt ist. Die bisherige Definition des Ideals ist insofern nicht ohne Weiteres eindeutig, als es ja vorkommen könnte, daß in unserer Normalfigur der durch das Ideal abzubildende Gitterpunkt mehreren unserer h Gitter gleichzeitig angehörte. Je nachdem wir ihn dann dem einen oder anderen dieser Gitter zuzählten, würden wir bei der Bildung des Ideals zu verschiedenen Ausdrücken ge-

führt werden.

Die Eigenschaft des Idealgitters, um welche es sich handeln soll, ist folgende: Der nach unseren früheren Regeln zu einem Gitterpunkte ξ hinzuconstruirte Idealgitter ist der Inbegriff aller durch ξ teilbaren Hauptzahlen.

Beweis: Erstens ist jede Zahl des Idealgitters eine durch ξ teilbare Hauptzahl.

Umgekehrt: Ist eine beliebige Hauptzahl w durch ξ teilbar und ξ in dem Gitter $\bar{G}$ enthalten, so ist $\frac{w}{\xi}$ nach Satz pag. 178 in dem Gitter $H.\bar{G}$ oder $\bar{G}$ gelegen, wo $\bar{G}$ das zu G conjugirte Gitter bedeutet, d. h. w wird erzeugt durch Multiplication von ξ mit einer Zahl des conjugirten Gitters, was wir eben behauptet haben.

Nehmen wir nun an, es gäbe zu einem Gitterpunkte zwei verschiedene Ideale! Wir erkennen sofort, daß diese Annahme

absurd ist, denn beide als verschiedenen vorausgesetzten Idealgitter müssen mit dem Inbegriff der durch unsere Gitterzahl teilbaren Hauptzahlen zusammenfallen. Mithin gibt es zu jedem Gitterpunkte unserer Figur nur ein bestimmtes Idealgitter.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist ersichtlich die, <u>daß keine zwei Gitter unserer Figur (vom Anfangspunkte abgesehen) einen Punkt gemein haben können.</u>

Wäre dieses nämlich der Fall, so könnten wir zu dem betr. Punkte zwei verschiedene Bildgitter hinzukonstruieren, indem wir ihn mit den Punkten der beiden Gitter multiplizieren, welche mit den Gittern, denen er selbst angehört, conjugirt sind.

Der letzte Satz ist für die Auffassung unserer Normalfigur natürlich von grosser Wichtigkeit. Die Uebersichtlichkeit dieser an

sich etwas komplizirten geometri-
schen Gebilden wird durch ihn erheb-
lich gesteigert – oder vielmehr, sie
würde völlig verloren gehen, wenn der
Satz nicht bestünde.

Wir schreiten nun zu einer neuen
Definition der Idealgitter, die wir
als die Dedekind'sche bezeichnen,
da sie von diesem herrührt.

Ausser den Idealgittern sind dem
Hauptgitter viele andere Gitter ein-
gelagert. Ein solches dem Hauptgit-
ter eingelagertes Gitter nennt nun
Dedekind ein Ideal, wenn es die fol-
gende Eigenschaft besitzt:

Ein beliebiger Punkt des Gitters
giebt multiplizirt mit einem be-
liebigen Punkte des Hauptgitters, wie-
der einen Punkt des Gitters.

Hier bietet sich uns die Aufgabe,
die Beziehungen zwischen unserer und
der Dedekind'schen Definition, aufzu-
suchen, eventuell die Identität beider
Definitionen nachzuweisen. Die
Untersuchung wird sich mit der

Beantwortung der folgenden beiden Fragen zu befassen haben:

1. Ist ein Idealgitter in unserem Sinne stets ein Dedekind'sches Ideal?

2. Ist ein Dedekind'sches Ideal stets ein Idealgitter in unserem Sinne?

Ad 1. Die Antwort auf die erste Frage ist leicht mit ja zu geben, wie sofort daraus folgt, dass unser Idealgitter der Inbegriff der durch eine feste Zahl teilbaren Hauptzahlen sind. Greifen wir nämlich einen beliebigen Punkt des Idealgitters heraus, so ist dieser gleich dem Produkte von einer bestimmten Zahl ξ mit einer Zahl der zu dem Gitter von ξ conjugirten Gitters. Multiplizieren wir dieses Produkt mit einer Hauptzahl, so ergiebt sich eine Zahl, welche nach unseren früheren Sätzen über Gittercomposition aufgefasst werden kann als Produkt derselben Zahl ξ mit einer gewissen Zahl derselben zu ξ conjugirten Gitters. Dieses

Product kommt aber nach Definition unter den Punkten des Idealgitters vor.

Ad 2. Die zweite Frage müssen wir ebenfalls mit ja beantworten, wie wir jetzt nachweisen wollen.

Wählen wir einen Basispunkt des vorliegenden Gitters auf der u-Axe, was stets möglich ist, so können wir dasselbe schreiben:

$$G' = ax + \left(m + n\frac{\sqrt{d}}{2}\right) y,$$

wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Fall $d \equiv 0 \pmod 4$ beschränken. a, m, n bedeuten hier ganze rationale Zahlen.

Nach Voraussetzung soll nun G' die Eigenschaft haben, daß, wenn man eine beliebige Zahl aus G mit einer beliebigen Hauptzahl multiplicirt, wieder eine Zahl aus G herauskommt. Wir machen deshalb den Ansatz:

$$\left[ax + \left(m + n\frac{\sqrt{d}}{2}\right)y\right]\cdot\left[x' + \frac{\sqrt{d}}{2}y'\right] = ax'' + \left(m + n\frac{\sqrt{d}}{2}\right)y''.$$

Hier müssen sich für alle ganzzahligen Werte von x, y, x', y' auch ganzzahlige Werte x'', y'' ergeben, d. h. die bilinearen Ausdrücke, welche x'' und y'' als Funktionen von $x, y \mid x', y'$ darstellen, müssen ganzzahlige Coefficienten haben. Diese lauten aber:

$$x'' = xx' - \frac{m}{n} xy' \qquad - \frac{m^2 - n^2 \frac{d}{4}}{an} yy'$$

$$y'' = \frac{a}{n} xy' + yx' + \frac{m}{n} yy'.$$

Aus der zweiten Zeile folgt, daß a und m durch n teilbar sein müssen, d. h. alle Zahlen der Gitters $\mathfrak{G}$ sind durch die ganze rationale Zahl n teilbar. Wir betrachten deshalb zunächst das einfachere Gitter:

$$\frac{\mathfrak{G}}{n} = \frac{a}{n} x + \left(\frac{m}{n} + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y,$$

das wir der Kürze halber wieder schreiben:

$$ax + \left(m + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y.$$

Die zugehörige Form lautet:

$$a^2 x^2 + 2am\, xy + \left(m^2 - \frac{d}{4}\right) y^2.$$

Aus den Formeln 1., die für unseren jetzigen Fall Geltung haben, wenn wir $n = 1$ setzen, folgt nun, daß $m^2 - \frac{d}{4}$ durch a teilbar sein muß. Die zum Gitter gehörige Form können wir daher auch schreiben:

$$a\left(ax^2 + 2mxy + \frac{m^2 - \frac{d}{4}}{a} y^2\right) \equiv a(ax^2 - bxy + cy^2).$$

Die in Klammern stehende Form ist nun eine Stammform, weil sie die Discriminante d besitzt; wir können deshalb setzen:

$$ax + \left(m + \frac{\sqrt{d}}{2}\right)y \equiv \varsigma \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\varsigma}\left(\sqrt{a}\, x + \frac{-b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\, y\right)$$

d. h. das Gitter $ax + \left(m + \frac{\sqrt{d}}{2}\right)y$ ist das Bildgitter der Gitterzahl $\varsigma \sqrt{a}$ und daher das ursprüngliche Gitter $\mathfrak{G}$ das Bildgitter der Gitterzahl $n \cdot \varsigma \sqrt{a}$, womit die Richtigkeit unserer Behauptung dargethan ist.

Wir wollen jetzt noch eine <u>Verallgemeinerung der gesammten Ideal-theorie</u> kurz besprechen, welche uns durch die Normalfigur nahe gelegt wird. Da wir in dieser immer

Haupt- und Nebengitter gleichzeitig und gleichberechtigt vor Augen haben, so werden wir es als eine Willkür bezeichnen, dass wir die Untersuchung der idealen Factoren durchaus auf das Hauptgitter warfen. Es zeigt sich nämlich, dass wir das Hauptgitter ebenso gut durch ein beliebiges, aber festes Nebengitter ersetzen können, welches wir sozusagen zum Bildträger für die den übrigen Punkten unserer Normalfigur zuzuordnenden Bildgitter machen.

Wir verfahren folgendermassen: Sei G' das ausgezeichnete beliebige Gitter, welches wir zum Bildträger machen wollen, G'' dasjenige Gitter, in welchem der abzubildende Punkt liegt. Zunächst suchen wir das Gitter G'' auf, welches mit G'' zum Punkt das Gitter G' ergiebt, so dass also

$$G'' G'' = G' \text{ ist.}$$

Um das Bildgitter der zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Gitterzahl

$$\varsigma\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right)$$

zu entwerfen, multiplizieren wir diese mit allen Gitterzahlen von $\mathfrak{G}''$, nämlich mit

$$\varsigma''\left(\sqrt{a''}\,x + \frac{b''+\sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}\,y\right).$$

Das so entstehende Gitter

$$\varsigma\varsigma''\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right)\left(\sqrt{a''}\,x + \frac{b''+\sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}\,y\right)$$

ist nach der Compositionstheorie dem Gitter $\mathfrak{G}'$ eingelagert und liefert ein Bild der dem Gitter $\mathfrak{G}$ angehörigen Punkte. Wir werden dieses Bildgitter ein Nebengitterideal nennen. Wir sagen also:

Jedem Gitterpunkte unserer Normalfigur kann nicht nur ein Hauptgitter ein Ideal entsprechend gesetzt werden, sondern auch in jedem fest verabredeten Nebengitter $\mathfrak{G}'$.

Diese neue Begriffsbildung wird

uns in der Theorie der singulären Moduln sehr nützlich sein, da sie der Gleichberechtigung der verschiedenen Wurzeln der Modulargleichung von vorne herein Rechnung trägt.

Wollen wir das Nebengitterideal in Dedekind'scher Weise definiren, so constatiren wir zunächst die selbstverständliche Thatsache, dass die Zahlen desselben ein Gitter bilden, d. h. sich durch Addition und Subtraction reproduciren.

Ferner aber: Multipliciren wir die Zahlen dieses Systems mit einer beliebigen Hauptzahl α, so ergeben sich Zahlen, welche demselben System angehören. In der That sind die Zahlen $\Gamma''\alpha$ wieder Zahlen der Gitters Γ'', daher gehören auch die Zahlen $\xi_i \Gamma''\alpha$ dem ursprünglichen, in Γ' gelegenen Bildgitter an.

Wiederum können wir den Satz umkehren, wo er dann lautet:

Befindet sich in einem festen

Gitter $\mathfrak{G}'$ ein eingelagertes Gitter, welches die Eigenschaft hat, daß seine Punkte, multiplicirt mit beliebigen Punkten des Hauptgitters, wieder ihm angehörige Punkte ergeben, so ist dieses eingelagerte Gitter ein zu dem Gitter $\mathfrak{G}'$ gehöriges Nebengitterideal.

Den Beweis führen wir auf den entsprechenden Satz für die Hauptgitterideale zurück. Ist

$$\xi_1 x + \xi_2 y$$

ein dem festen Gitter $\mathfrak{G}'$ eingelagertes Gitter mit der vorausgesetzten Eigenschaft, und componiren wir dasselbe mit dem zu $\mathfrak{G}'$ conjugirten Gitter $\bar{\mathfrak{G}}'$, so ergiebt sich offenbar ein dem Hauptgitter eingelagertes Gitter:

$$(\xi_1 x + \xi_2 y) \cdot \bar{\mathfrak{G}}' = \omega_1 x + \omega_2 y,$$

das ebenfalls die Eigenschaften eines Dedekind'schen Ideals besitzt. Entspricht ihm der ideale

Factor ξ aus dem Gitter G, so ist

$$\omega_1 x + \omega_2 y = \xi \cdot \bar{G},$$

wo $\bar{G}$ das zu G conjugirte Gitter bedeutet. Aus den hingeschriebenen Gleichungen folgt nun:

$$\xi_1 x + \xi_2 y = G'(\omega_1 x + \omega_2 y) = \xi G' \bar{G} = \xi \cdot G'',$$

d. h. ξ ist auch der zu $\xi_1 x + \xi_2 y$ gehörige ideale Factor, und daher $\xi_1 x + \xi_2 y$ ein Nebengitterideal in unserem Sinne.

Wir gehen jetzt auf das Entsprechen zwischen Idealen und idealen Factoren näher ein und beweisen dies: bezüglich den folgenden grundlegenden Satz, der uns zeigt, daß hinsichtlich der Teilbarkeit Ideal und idealer Factor völlig aequivalent sind:

Sind alle Zahlen eines Idealgitters (mag es nun ein Hauptgitter oder ein echtes Nebengitter sein) durch eine ganze algebraische Zahl teilbar, so ist auch

der zugehörige ideale Factor durch dieselbe teilbar.

Beweis: Bezeichnen wir das Ideal mit $\xi . \mathfrak{J}$ und sind alle Zahlen derselben durch die ganze algebraische Zahl η teilbar, so sind alle Zahlen des Ideals $\xi^h \mathfrak{J}^h$ oder $\xi^h \mathfrak{H}$ durch η^h teilbar. Da nun in $\mathfrak{H}$ die 1 enthalten ist, muß ξ^h durch η^h teilbar sein, oder $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^h$ eine ganze algebraische Zahl.

Ist aber $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^h$ eine ganze algebraische Zahl, so ist es auch $\frac{\xi}{\eta}$. Denn genügt $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^h$ etwa der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_{n-1} x + a_n = 0,$$

wo $a_1, \ldots a_{n-1}, a_n$ ganze rationale Zahlen bedeuten, so genügt $\frac{\xi}{\eta}$ der Gleichung

$$x^{nh} + a_1 x^{(n-1)h} + \cdots a_{n-1} x^h + a_n = 0,$$

ist also ebenfalls eine ganze algebraische Zahl.

Wir fügen dem vorstehenden Theorem noch den folgenden leicht

einzuschiebenden Satz hinzu:

Die Zahlen eines Stammgitters (mag es nun das Haupt- oder ein Nebengitter sein) besitzen in ihrer Gesammtheit keinen gemeinsamen Teiler.

Besäßen dieselben nämlich einen gemeinsamen Teiler, so müßte die zum Gitter gehörige Form offenbar imprimitiv sein, was bei einer Stammform nicht möglich ist.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu unserer Hauptaufgabe. Als solche haben wir pag. 180 bezeichnet: Einen dem Euklidischen analogen Algorithmus zu finden, welcher zur Auffindung des größten gemeinsamen Teilers zweier Gitterzahlen ξ und ξ' führt. Die Gitterzahlen können dabei Haupt- oder Nebenzahlen sein, zu gleichen oder zu verschiedenen Gittern gehören.

Unser Verfahren, welches, wie wir sehen werden, dem Verfahren der gewöhnlichen Zahlentheorie

genau nachgebildet ist, soll in Folgendem bestehen. Wir bilden zu beiden Zahlen die zugehörigen Idealgitter

$$\xi . G \text{ und } \xi' . G'$$

Wir fügen diese Gitter in der Weise zusammen, daß wir zu jeder Zahl des einen jede Zahl des anderen Gitters addiren, d. h. wir addiren die beiden Gitter. Die entstehende Summe ist wieder ein Gitter und zwar ein Idealgitter, weil es die Dedekind'schen Definitionsbedingungen befriedigt. Es muß daher zu ihm ein idealer Factor $\bar{\imath}$ gehören, nach dessen Abspaltung noch das Stammgitter T übrig bleiben möge, so daß wir haben

$$\xi . G + \xi' . G' = \bar{\imath} . T$$

Wir behaupten nun, daß $\bar{\imath}$ der gesuchte größte gemeinsame Teiler von ξ und ξ' ist. Denn

Erstens ist $\bar{\iota}$ ein Teiler sowohl von ξ wie von ξ', weil alle Zahlen von $\xi . G$ und von $\xi' . G'$ durch $\bar{\iota}$ teilbar sind, also nach Satz pag. 198 auch ξ und ξ' selbst. Ferner sind aber auch $\frac{\xi}{\bar{\iota}}$ und $\frac{\xi'}{\bar{\iota}}$ relativ prim. Denn wir haben

$$\frac{\xi}{\bar{\iota}} . G + \frac{\xi'}{\bar{\iota}} . G' = \mathfrak{G}$$

Hätten nun $\frac{\xi}{\bar{\iota}}$ und $\frac{\xi'}{\bar{\iota}}$ noch einen gemeinsamen Teiler, so müßten auch sämtliche Gitterzahlen des Stammgitters $\mathfrak{G}$ durch ihn teilbar sein. Diese besitzen aber, wie wir soeben ausgeführt haben, keinen gemeinsamen Teiler. Daher gilt dasselbe auch für $\frac{\xi}{\bar{\iota}}$ und $\frac{\xi'}{\bar{\iota}}$, d. h. $\bar{\iota}$ ist der größte gemeinsame Teiler von ξ und ξ'.

Daher die folgende Regel: <u>Um den größten gemeinschaftlichen Teiler zweier Gitterzahlen zu finden, addire man die zugehörigen Ideale und bestimme</u>

den zu dem entstehenden Ideal gehörigen idealen Faktor

Um zu zeigen, daß dieser Prozess dem der gewöhnlichen Zahlentheorie parallel geht, bestimmen wir etwa den größten gemeinschaftlichen Divisor von 6 und 9. Wir können da so sagen: Wir bilden das zur Zahl 6 und das zur Zahl 9 gehörige Ideal. Dieses Ideal besteht natürlich aus der Gesammtheit der durch 6 bez. durch 9 teilbaren Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Durch Addition beider Ideale folgt das Zahlensystem

$$0, 3, 6, 9, \ldots,$$

welches wir auffassen können als das zur Zahl 3 gehörige Ideal. Diese Zahl 3 ist der gesuchte größte gemeinsame Teiler von 6 und 9.

Nachdem wir im Vorstehenden die begriffliche Seite unseres Prozesses geschildert haben, wird es keine Schwierigkeit haben, densel-

ben in arithmetische Form zu set.
zen. Das Prinzip wird dabei folgendes sein:
Zu jedem der beiden Ideale $\mathfrak{z}$ Grund
$\mathfrak{z}'$ $\mathfrak{z}''$ gehören zwei Basiszahlen.
Durch passende Zusammenfügung
der letzteren wird man die Basiszah,
len des durch Summation entstehen,
den Ideales berechnen. Aus dem
letzteren bestimmt sich aber leicht
der zugehörige ideale Faktor.
Wir erkennen nun auch deut,
lich den eigentlichen Grund, wel,
cher zu der Einführung der Ideale
in diese Betrachtung zwingt.
Dieser besteht darin, daß man
zum Uebertragung des Euklidischen Al,
gorithmus die Addition der Gitter,
zahlen nötig hat. Diese können wir
aber bei zwei beliebigen Gitterzah,
len, sofern dieselben verschiedenen
Gittern angehören, nicht ausführen,
ohne aus unserer Normalfigur
heraus zu treten. Es ist nöthig, die
Zahlen vorerst commensurabel
zu machen, beispielsweise dadurch,

dass man ihnen je ein Zahlensystem des Hauptgitters zuordnet. Die so entstehenden Bilder kann man dann nach Belieben durch Addition combiniren.

Gleichzeitig bemerken wir nochmals, dass die Auszeichnung des Haupt-gitters hierbei unwesentlich ist. Wir können die Bilder der Gitterzahlen ebensogut in einem beliebigen, aber festen anderen Gitter construiren, weil auch diese die Addition zu-lassen.

Wir möchten hier noch ausdrücklich der in den Büchern häufig ausgespro-chenen Ansicht entgegentreten, wonach es im Gebiete der complexen algebra-ischen Zahlen keinen dem gewöhnli-chen analogen Algorithmus des gröss-ten gemeinsamen Teilers gebe. Diese Ansicht ist nur berechtigt, wenn man sich auf den speziellen Stand-punkt stellen will, dass allein die Zahlen des Hauptgitters als Material gegeben sind. Demgegen-

über sahen wir, daß, bei gleichmäßiger Berücksichtigung der Nebengitter, der elementare Proceß in passender Verallgemeinerung genau aufrecht erhalten werden kann.

Auf Grund unseres Processes können wir nun alle diejenigen Schlüsse, welche man an denselben in der gewöhnlichen Zahlentheorie knüpft, genau wiederholen und kommen dabei zu entsprechenden Resultaten.

Wir haben nur vor allen Dingen zu überlegen, daß überhaupt nothwendigerweise Primzahlen existiren. Der Grund ist, daß die Factorenzerlegung einer vorgelegten Gitterzahl, von der Abspaltung von Einheiten abgesehen, nicht in's Unendliche weiter gehen kann. Denn zu den Factoren müssen ganzzahlige Werte von f gehören, welche den zur gegebenen Gitterzahl gehörigen ganzzahligen Wert von f teilen.

Ferner aber handelt es sich um den Satz, <u>daß eine beliebige Zahl sich auf eine und nur auf eine Weise in ein Product von Primzahlen zerlegen lasse.</u>

Der Hauptpunkt beim Beweise desselben bildet, wie bekannt, schon in der gewöhnlichen Zahlentheorie das folgende Lemma:

<u>Wenn das Product zweier Zahlen durch eine Primzahl teilbar ist so wird notwendiger Weise eine der beiden Zahlen durch die Primzahl geteilt.</u>

Dieses Lemma wollen wir hier für unser Zahlengebiet in Kürze beweisen, während wir die übrigen Teile des Beweises überspringen können, da sie aus der gewöhnlichen Zahlentheorie unmittelbar herüber genommen werden können.

Seien also α und β zwei Gitterzahlen von denen bekannt ist, daß ihr Product $\alpha\beta$ durch eine Primzahl π teilbar ist. Wir

nehmen an, dass etwa α durch π nicht teilbar sei. Dann ist der grösste gemeinsame Teiler von α und π die Einheit. Bilden wir nun die zu α und π gehörigen Ideal-gitter, so erhalten wir durch Summation ein neues Ideal, welches zu dem Faktor 1 gehört, also das ganze Hauptgitter ausmacht. In diesem muss insbesondere der Einheitspunkt $(1, 1)$ selbst enthalten sein. Mithin haben wir die Gleichung

$$\alpha A + \pi \Pi = 1,$$

unter A und Π geeignet gewählte Zahlen aus den zu α und π konjugirten Gittern verstanden. Diese Gleichung multiplicieren wir beiderseits mit β. Es ist aber in der Gleichung

$$\alpha\beta A + \beta\pi\Pi = \beta$$

die linke Seite nach Voraussetzung durch π teilbar. Also ist es auch

die rechte. Wir sehen also, daß von den beiden Zahlen α und β notwendig eine durch π teilbar ist.

Von hier aus folgt der Beweis des Fundamentalsatzes über die eindeutige Zerlegbarkeit eines jeden Gitterpunktes in Primpunkte in bekannter Weise von selbst.

Wir schließen unsere Darstellung der für unser Zahlengebiet geltenden Teilbarkeitsverhältnisse damit, daß wir eine Aufzählung sämmtlicher in unserem Zahlengebiete vorhandenen Primzahlen vornehmen.

1. Die Aufzählung wird durch den folgenden Satz erleichtert.

Man erhält alle Primpunkte unserer Figur, wenn man zusieht, in welche Factoren sich die auf der horizontalen Geraden des Hauptgitters gelegenen Punkte $(p, 0)$ zerlegen lassen, deren Coordinaten p Primzahlen im Sinne der gewöhnlichen Zahlentheorie sind.

In der That, sei $(\pi, \bar{\pi})$ ein belie-

biger Primpunkt, welcher mit seinem conjugirten ($\bar{\pi}, \pi$) multiplizirt, den rationalen Punkt (m, m) ergibt. Hier ist, wie wir behaupten, m eine gewöhnliche Primzahl p oder das Quadrat einer solchen. Denn

1. Kann m nicht durch 2 verschiedene rationale Primzahlen p und q teilbar sein. Wäre nämlich

$$m = p.q.m',$$ so hätten wir, da auch

$$m = \pi.\bar{\pi}$$

unter allen Umständen zwei verschiedene Zerlegungen von m, mögen nun p, q und m' noch weiter zerlegbar sein oder nicht.

2. Es muss also m die Potenz einer gewöhnlichen Primzahl sein:

$$m = p^{\lambda}.$$

Hier kann nun λ höchstens gleich 2 sein, weil sonst offenbar m in mehr als 2 Primfactoren zerlegbar wäre, was der Gleichung $m = \pi.\bar{\pi}$ widerspricht.

Hiermit ist die Richtigkeit des angegebenen Satzes dargethan, aber implicite auch schon eine Einteilung der aufzuzählenden Primzahlen gegeben. Wir werden dieselben nämlich in 2 Categorieen einteilen, je nachdem $\lambda = 1$ oder $\lambda = 2$ ist.

I $\lambda = 1$. Es ist $\pi . \bar{\pi} = p$

Hier sind wieder noch 2 Fälle zu scheiden

a) π und $\bar{\pi}$ verschieden

b $\pi = \bar{\pi}$ (natürlich bis auf Einheiten)

In beiden Fällen bleibt die gewöhnliche Primzahl p nicht mehr Primzahl in unserem Zahlsystem, sondern ist noch weiter in 2 Primfactoren zerlegbar.

II $\lambda = 2$; $\pi . \bar{\pi} = p . p$

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt:

$$\pi = \bar{\pi} = p .$$

In diesem Falle ist die gewöhnliche Primzahl p auch Primzahl im unserem erweiterten Zahlsystem

2. Wir fragen nun weiter, wann die Fälle $\overline{\text{I}}$ und $\overline{\text{II}}$ eintreten werden. Dies bezüglich haben wir den Doppelsatz:

Der Fall $\overline{\text{I}}$ tritt ein, d. h. die gewöhnliche Primzahl p ist in das Product zweier conjugirter Primfactoren spaltbar, wenn p durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar ist.

Der Fall $\overline{\text{II}}$ tritt ein, d. h. die gewöhnliche Primzahl p ist nicht weiter zerlegbar, wenn p nicht durch eine quadr. Form der Discr. d darstellbar ist.

Der erste Teil dieses Satzes ist selbstverständlich, denn die Darstellung von p durch eine quadr. Form der Discriminante d giebt direct die beiden Primfactoren an, in die p zerlegbar ist.

Die Richtigkeit des zweiten Teiles ist leicht auf indirecte Weise zu schliessen. Angenommen, p wäre nicht durch eine quadratische Form der Discriminante d

darstellbar und doch zerlegbar, etwa

$$p = \bar{\pi} \cdot \bar{\bar{\pi}},$$ so könnten wir setzen

$$\bar{\pi} = \varrho\left(\sqrt{a}\, x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\, y_0\right) \text{ und } \bar{\bar{\pi}} = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\, x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\, y_0\right).$$

Hieraus würde folgen:

$$p = a x_0^2 + b x_0 y_0 + c y_0^2 \text{ und } b^2 - 4ac = d,$$

d. h. p wäre doch durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar, war der Voraussetzung wie, dersprichtt. Es kann deshalb p in dem angenommenen Falle nicht weiter zerlegbar sein.

3. Bevor wir auch die Fälle I a und I b trennen, fügen wir noch folgenden Satz ein:

<u>Läßt sich p durch eine Form der Discriminante d darstellen, so giebt es speciell auch eine solche Form, deren erster Coefficient p ist.</u>

Es sei

$$p = a x_0^2 + b x_0 y_0 + c y_0^2,$$

wo x_0, y_0 zwei ganze rationale

Zahlen bedeuten, die notwendig teilerfremd sein müssen, da p Primzahl sein soll. Wir wenden nun auf die Form $ax^2+bxy+cy^2$ die Substitution

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned}\right| \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

an.

Hierdurch entstehe die Form

$$a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2.$$

In unserer linearen Substitution können wir die Coefficienten α und γ willkürlich wählen mit der alleinigen Beschränkung, daß sie keinen gemeinsamen Teiler haben dürfen. Wie aus dem Anfang dieser Vorlesung bekannt, lassen sich dann in der That stets correspondirende Werte von β und δ bestimmen. Speciell wollen wir α und γ gleich x_0 und y_0 nehmen. Dann gehört zu dem Wertepaare $x'=1$, $y'=0$ das Wertepaar $x=x_0$,

$y = y_0$. Unsere Form (a', b', c') muß also für $x' = 1$, $y' = 0$ den Wert p liefern; wir haben mithin:

$a' = p$, was zu beweisen war.

4. Wir gehen jetzt dazu über, die Kriterien für die Fälle I a und I b anzugeben:

I a. Die Primzahl p ist in das Produkt zweier verschiedener Primfaktoren zerlegbar, wenn p nicht in d aufgeht (und wenn, wie bereits angegeben wurde, p durch eine quadratische Form der Diskriminante d darstellbar ist.)

I b. Die Primzahl p zerfällt in das Produkt zweier gleicher Primfaktoren $Vp.Vp$, wenn p in d aufgeht.

Die Beweise für diese Angaben liegen in den folgenden Ausführungen.

Ist d durch p teilbar, so ist auch der zweite Koeffizient der Form (p, b', c') durch p teilbar. Durch Reduktion kann man einen der beiden Fälle erreichen: $b' = 0$ oder

$b' = p$. In beiden Fällen ist die Form eine Anwepsform.

Sie lautet

$$p x^2 - \frac{d}{4p} y^2 \text{ beziehungsweise}$$

$$p x^2 + p x y + \frac{p^2 - d}{4p} y^2.$$

Auf Grund unserer Orientierung der Anwepsgitter ergiebt sich die Zerlegung

$$p = \sqrt{p} \cdot \sqrt{p},$$

p erscheint also als das Quadrat einer sich selbst conjugirten Primzahl.

Geht p nicht in d auf, so ist auch der zweite Coefficient von (p, b', c') nicht durch p teilbar. Wir erhalten daher hier eine Zerlegung:

$p = \varsigma \sqrt{p} \cdot \frac{1}{\varsigma} \cdot \sqrt{p}$, wo ς von 1 und einer Einheit verschieden ist.

p erscheint also als das Product zweier ungleicher Primzahlen.

5. Wir wollen jetzt die vorstehenden Kriterien noch etwas vereinfachen, indem wir die Darstellbar-

keit von p durch eine quadratische Form der Discriminante d auf das Legendre'sche Symbol $\left(\frac{d}{p}\right)$ zurück-führen.

Ist nämlich p durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar, so giebt es eine quadratische Form mit dem ersten Coefficienten p:

$$px^2 + bxy + cy^2, \quad \text{so dass}$$

$b^2 - 4pc = d$, also $b^2 \equiv d \pmod{4p}$ ist.

Umgekehrt: besteht die Congruenz $b^2 \equiv d \pmod{4p}$, so lässt sich stets p durch eine quadratische Form

$$px^2 + bxy + \frac{b^2 - d}{4p} y^2$$

mit der Discriminante d darstellen.

Für das Folgende haben wir jetzt die Fälle $p = 2$ und p ungerade gesondert zu betrachten.

6. Wir untersuchen zunächst die Zerlegbarkeit von 2, betrachten also die Congruenz:

$$b^2 \equiv d \pmod{8}$$

Von Hause aus hat die Discriminante d eine der Formen:

$$8\sigma,\ 8\sigma+1,\ 8\sigma+4,\ 8\sigma+5.$$

Hiervon erledigen sich die Fälle $d = 8\sigma$ und $d = 8\sigma+4$ sofort; beidemale ist nämlich d durch 4 teilbar; infolgedessen zerfällt 2 in die Primfactoren $\sqrt{2}.\sqrt{2}$.

Ist $d = 8\sigma+1$, so ist die Congruenz $b^2 \equiv d \pmod 8$ lösbar, daher 2 durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar und folglich in zwei verschiedene Primfactoren zerlegbar.

Ist $d = 8\sigma+5$, so ist die obige Congruenz nicht lösbar, daher auch 2 nicht durch eine Form der Discriminante d darstellbar und infolgedessen unzerlegbar. Zusammenfassend haben wir:

$d \equiv 0 \pmod 4$ . . . $2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$d = 8\sigma+1$ . . . . 2 zerfällt in das Product zweier verschiedener Primfactoren

$d = 8\sigma+5$ 2 ist unzerlegbar

7. Wir betrachten jetzt den Fall, daß p eine ungerade Primzahl ist. In diesem Falle zieht die Lösbarkeit der Congruenz $b^2 \equiv d \pmod{p}$ diejenige der Congruenz $b^2 \equiv d \pmod{4p}$ stets nach sich. Wir können daher sofort das folgende Resultat hinschreiben:

$\left(\frac{d}{p}\right) = +1$; p zerfällt in das Product zweier verschied. Primfaktoren.

$\left(\frac{d}{p}\right) = 0$; p " " " " gleichen Primfaktoren $\sqrt{p} \cdot \sqrt{p}$.

$\left(\frac{d}{p}\right) = -1$; p ist unzerlegbar, also selbst Primzahl.

8. Wir wollen endlich bei einer beliebigen Zahl

$$n = p^{\varkappa} \cdot q^{\lambda} \cdots$$

fragen, auf wieviel Arten dieselbe als Product zweier conjugirter Zahlen ν und $\bar{\nu}$ unseres Gebietes aufgefaßt werden kann. Zu dem Zwecke zerlegen wir $p, q \ldots$, soferne es angeht, und ordnen die einzelnen Factoren $\pi, \bar{\pi}$ auf alle Weisen zu conjugirten Producten. Dies

ist eine rein combinatorische Aufgabe.

Bemerken wir noch, daß diese Frage übereinstimmt mit der Frage nach der Anzahl der Darstellungen, welche die Zahl n durch Formen unserer Discriminante zuläßt. In der That gibt jede solche Darstellung eine Zerlegung der Zahl n und umgekehrt.

Geometrisch bedeutet diese Anzahl die Zahl derjenigen Gitterpunkte, welche in der Normalfigur die Entfernung V_n von 0 haben. Aus der vorstehenden Regel zur Berechnung jener Zahl ersehen wir, daß sie bei einer größeren Anzahl in n vorkommender Factoren sehr erheblich sein kann. Es gibt dann eine große Menge von Punkten, welche von 0 dieselbe Entfernung V_n haben. Aber alle diese Punkte sind in unserer Normalfigur verschieden, weil sie sich eben aus verschiedenen Primpunkten aufbauen.

9. VII. 96. Hiermit schliessen wir unsere Behandlung der Compositionstheorie ab. Wir wollten dieselbe eigentlich noch weiter führen, indem wir sie von den Stammgittern (Discriminante d), auf beliebige Zweiggitter (Discriminante $D = n^2 d$) ausdehnen. Diese Verallgemeinerung bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, muss aber hier der Kürze halber übergangen werden. Trotzdem werden wir die bisherigen Resultate gleichentlich auch für Zweiggitter in Anspruch nehmen.

III. Hauptteil.

Theorie der singulären elliptischen Gebilde.

Wir legen eine ganzzahlige negative Discriminante zu Grunde und betrachten die zu dieser Discriminante gehörige Normalfigur, bestehend aus h Gittern in bestimmter Orientierung. Die hierdurch definirten Gitterzahlen sind gewöhnliche complexe Zahlen von der Form $u \pm i v$. Die Discriminante wollen wir bezeichnen mit $D = -\nabla$ (indem wir uns das Zeichen Δ für die Discriminante der elliptischen Functionen vorbehalten).

Zu jedem dieser Gitter gehört ein gewisses elliptisches Gebilde. Dasselbe heisst singulär, weil die aus den Perioden ω_1, ω_2 (den Basiszahlen unseres Gitters) gebildete quadratische Form

$f = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y) = a x^2 + b x y + c y^2$
eine ganzzahlige Form ist.

Wir studiren die Besonderheiten dieser singulären Gebilde. Dieselben bestehen allgemein zu reden, darin, dass die Compositionstheorie auf sie Anwendung findet.

Speciell erinnern wir an den Schering'schen Satz (vergl. pag. 145) wonach jeder unserer h Gitter (bez. elliptischer Gebilde) durch eine Anzahl erzeugender Gitter (Gebilde) dargestellt werden kann in der Form

$$G = \Gamma^{\alpha} \Gamma^{\alpha'} \ldots .$$

Um an diese bestimmte Art der Darstellung zu erinnern, schreiben wir statt $G : G_\alpha$ (oder auch eventl. $G^{(\alpha)}$). Die Thatsache der Gittercomposition drückt sich dann einfach durch die Formel aus

$$G_\alpha \cdot G_{\alpha'} = G_{\alpha + \alpha'}$$

Unter den Invarianten unserer elliptischen Gebilde werden wir dabei

nach den früheren Entwickelungen die folgenden berücksichtigen, die wir nach der Stufenzahl bez. nach ihrem Grade in den Variabeln ω_1, ω_2 noch einmal tabellarisch zusammenstellen

	Modulfunctionen (Grad = 0)	Modulformen (Grad ≠ 0)
1. Stufe	$j = 1728 J$	$g_2 \quad g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ Grad 4 $\quad -6 \quad -1$
5. Stufe	ξ	$\xi_1, \quad \xi_2$ Grad $+1$

Wir unterwerfen nun unsere Gebilde beliebigen Transformationen höherer Ordnung, suchen also zu den gegebenen Punktgittern neue auf, welche in jene eingelagert sind. Nun kennen wir für jedes unserer h Gitter eine besondere Kategorie von eingelagerten Gittern, nämlich die Idealgitter.

Die Besonderheit, welche unsere

singulären Gebilde gegenüber Transformationen höherer Ordnung darbieten, werden darin bestehen, dass unter den transformirten Gebilden die jenigen vorhanden sind, welche den Idealgittern entsprechen.

Zur dieser Bemerkung fliessen in der That höchst bemerkenswerthe Consequenzen bezüglich der soeben genannten Invarianten. Wir behandeln zunächst die Invarianten der 1ten Stufe und unterwerfen dieselben einer Transformation vom Prim-Zahlgrade p (wobei wir $p > 2$ voraussetzen mögen).

Wir müssen unterscheiden, ob die Zahl p in unserer Formalfigur unzerlegbar ist, ob sie in das Product zweier gleicher oder zweier verschiedener Factoren zerfällt. Ueber den ersten Fall ist nichts Besonderes zu bemerken, weil sich hier die Transformationstheorie der singulären Gebilde ebenso gestaltet wie die der nicht-

singulären. Der zweite Fall tritt nur bei denjenigen Primzahlen auf, welche Theiler der Discriminante Δ sind, und soll zunächst zurückgeschoben werden.

Wir setzen demnach voraus, dass der dritte Fall vorliegt, dass wir also haben

$$p = \pi . \bar{\pi}$$

wo π und $\bar{\pi}$ zwei verschiedene Primzahlen sind, welche bez. zu den Gittern $\mathfrak{G}_\beta$ und $\mathfrak{G}_{-\beta}$ gehören mögen.

Es handle sich nun die Transformation des elliptischen Gebildes $\mathfrak{G}_\alpha$, welches nach Belieben also zu dem Hauptgitter oder zu einem Nebengitter gehörig vorausgesetzt werden möge. Wir kennen von vornherein zwei dem Gitter $\mathfrak{G}_\alpha$ eingelagerte Gitter, nämlich die beiden (Haupt- oder Neben-) Idealgitter:

$$\pi . \mathfrak{G}_{\alpha-\beta} \quad , \quad \bar{\pi} . \mathfrak{G}_{\alpha+\beta}.$$

In der That gehören alle Ecken

dieser beiden Gitter nach der Composition der Gitter G_α an. Wir haben nämlich:

$$G_\beta \cdot G_{\alpha-\beta} = G_\alpha \text{ bez. } G_{-\beta} \cdot G_{\alpha+\beta} = G_\alpha .$$

Die Perioden der durch unsere Ideal-gitter definirten elliptischen Gebilde sind ersichtlich wenn wir mit $w_1^{(\alpha-\beta)}$, $w_2^{(\alpha-\beta)}$ etc. die Perioden von $G^{(\alpha-\beta)}$ etc. bezeichnen, die folgenden:

$$\begin{cases} \tilde{\pi} \cdot w_1^{(\alpha-\beta)} \\ \tilde{\pi} \cdot w_2^{(\alpha-\beta)} \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{\pi} \cdot w_1^{(\alpha+\beta)} \\ \bar{\pi} \cdot w_2^{(\alpha+\beta)} \end{cases}.$$

Diese Perioden entstehen also aus den Perioden von $G_{\alpha-\beta}$ und $G_{\alpha+\beta}$ durch Multiplication mit der Zahl $\tilde{\pi}$ oder $\bar{\pi}$, oder wie man kurz sagt, durch complexe Multiplication.

Bemerken wir, daß die zu unseren beiden Idealgittern gehörige quadratische Form die folgende ist:

$$f = \tilde{\pi}\bar{\pi}\,(w_1^{(\alpha+\beta)} x + w_2^{(\alpha+\beta)} y)(\bar{w}_1^{(\alpha+\beta)} x + \bar{w}_2^{(\alpha+\beta)} y).$$

Sie entsteht also aus der zu $\bar{J}_{\alpha} \mp 3$ gehörigen Form durch Multiplication mit p; sie ist imprimitiv und hat die Discriminante $p^2 D$.

Hinsichtlich des Elementarparallelogramms der Idealgitter folgt hieraus: Dieses ist gleich $p\sqrt{-D}$, also p-mal so gross wie das Elementarparallelogramm eines der gegebenen h Gitter.

In Folge dessen entstehen unsere Idealgitter aus dem Gitter G_{α} durch Transformation p^{ter} Ordnung. Nun wissen wir von früher her (vergl. pg. 29), dass allgemein aus einem beliebigen Gitter durch Transformation p^{ter} Ordnung $p+1$ neue grossmaschige Gitter entstehen, die dem gegebenen Gitter eingelagert sind.

Von diesen $p+1$ Gittern sind in unserem Falle zwei von vornherein bekannt, nämlich unsere Idealgitter.

Wir haben damit den zentralen

Satz in der Theorie der singulären elliptischen Gebilde bezeichnet. Sehen wir zu, welche algebraischen Folgerungen sich daraus ergeben.

Wir betrachten zunächst die Transformationsgleichung für die Invariante j:

$$F(j', j) = 0$$

und verstehen unter j die zum Gitter $\mathfrak{G}_\alpha$ gehörige Invariante, die wir j_α nennen. Die Invarianten der $p+1$ transformierten Gitter j' werden durch die Wurzeln unserer Gleichung bestimmt. Denken wir uns nun die Invarianten $j_1, \ldots j_p$ gegeben, welche zu den ursprünglichen Gittern unserer Normalfigur gehören, so sind von den $p+1$ Wurzeln der Transformationsgleichung zwei bekannt nämlich die Invarianten der Idealgitter. Da j nur von dem Periodenquotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ abhängt und da die Perioden der Ideal-gitter aus denen von $\mathfrak{G}_\alpha - \beta$

und $G_{\alpha+\beta}$ durch komplexe Multiplikation hervorgehen, so sind die Invarianten der Idealgitter mit den Invarianten $j_{\alpha-\beta}$ und $j_{\alpha+\beta}$ identisch. Es sind also in der That von den $p+1$ Wurzeln zwei bekannt, nämlich

$$j' = j_{\alpha-\beta} \quad \text{und} \quad j' = j_{\alpha+\beta}.$$

Der soeben abgeleitete Satz läßt eine wichtige Verschärfung zu, nämlich:

Die übrigen $p-1$ Wurzeln der Transformationsgleichung sind von den singulären $j_1, j_2, \ldots, j_h$ verschieden.

Der Beweis für diese Behauptung ist sehr einfach. Soll $j' = j_k$ sein, so muß das zu j' gehörige Gitter G' dem zu j_k gehörigen Klassengitter ähnlich sein, also

$$G' = \mu_{\alpha-k} \cdot G_k.$$

Um die Natur der Zahl $\mu_{\alpha-k}$ zu erkennen, komponire ich beiderseits mit G_{-k}, so daß sich ergiebt:

$$G' G_{-k} = \mu_{\alpha-k} \cdot H.$$

Da nun A die 1 enthält, muß $\mu_{\alpha-k}$ in dem Gitter $G' G_{-k}$ vorkommen und auch, da G' in G_α enthalten ist, in dem Gitter $G_\alpha \cdot G_{-k} = G_{\alpha-k}$. Es ist also $\mu_{\alpha-k}$ eine Gitterzahl des Gitters $G_{\alpha-k}$. Hieraus folgt, daß G' ein dem Gitter G_α eingelagertes Idealgitter ist. Nun ergiebt sich aus der Eindeutigkeit der Faktorenzerlegung von p, daß es nur zwei in G_α durch Transformation p^{ter} Ordnung eingelagerte Idealgitter giebt, nämlich:

$$\bar{\pi} \cdot G_{\alpha-\beta} \quad \text{und} \quad \bar{\pi} \cdot G_{\alpha+\beta}.$$

Mit einem von diesen muß also G' notwendig identisch sein, d. h. es ist f_k entweder gleich $f_{\alpha+\beta}$ oder gleich $f_{\alpha-\beta}$, wie wir behauptet haben.

Nehmen wir ferner die Multiplikatorgleichung

$$\Phi(m, r) = 0.$$

Diese ist in m vom $(p+1)^{\text{ten}}$

Grade; ihre Coefficienten sind nach Adjunction der Größen μ^2, μ^3 (vergl. pag.) rational. Ihre Wurzeln bestimmen zu dem Gitter G_α die Multiplicatoren der zugehörigen $p+1$ transformirten Gitter.

Denken wir uns die Werte der Discriminante Δ, welche zu den ursprünglichen h Gittern gehören, gegeben, so sind wieder, um zwei von den $p+1$ Wurzeln der Multiplicatorgleichung bekannt, nämlich die Multiplicatoren der Idealgitter. In der That werden die Discriminanten der Idealgitter

$$\Delta' = \Delta\left(\pi.\omega_1^{(\alpha-\beta)}, \pi\omega_2^{(\alpha-\beta)}\right) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{12}\Delta^{(\alpha-\beta)}$$

bezw.

$$\Delta' = \Delta\left(\bar{\pi}\omega_1^{(\alpha+\beta)}, \bar{\pi}\omega_2^{(\alpha+\beta)}\right) = \left(\frac{1}{\bar{\pi}}\right)^{12}\Delta^{(\alpha+\beta)}$$

mithin die zugehörigen Multiplicatoren:

$$M = \bar{\pi}\sqrt[12]{\frac{\Delta^{(\alpha-\beta)}}{\Delta^{(\alpha)}}} \quad \text{bez.} \quad M = \pi\sqrt[12]{\frac{\Delta^{(\alpha+\beta)}}{\Delta^{(\alpha)}}}.$$

Diese von vornherein bekannten Größen müßen sich unter den Wurzeln der Multiplicatorgleichung vorfinden. Allerdings bleibt hierbei noch unbestimmt und muß durch besondere Betrachtung festgestellt werden, welcher von den zwoelf Werten von M, die in den vorstehenden Ausdrücken enthalten sind, der Multiplicatorgleichung genügt. Hierüber entscheiden die von Hurwitz gegebenen Entwickelungen.

7. VII. 96. Die vorhergehenden allgemeinen Resultate sollen nun specialisirt werden.

Wir halten zunächst daran fest, daß p in zwei verschiedene Primfactoren π und $\bar{\pi}$ zerfällt, setzen aber voraus, daß diese in ein und demselben Gitter, d. i. in einem Ancepsgitter liegen. Dann ist also $G_\beta = G_{-\beta}$ und $G_{\alpha-\beta} = G_{\alpha+\beta}$. Die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Transformationsgleichung werden in diesem Falle iden-

tisch. es ist $j_{\alpha-\beta} = j_{\alpha+\beta}$. Unsere Gleichung $(F(j', j_\alpha) = 0$ erhält also eine Doppelwurzel, falls die beiden Faktoren von p einem Ansatzgitter angehören.

Was die Multiplikatorgleichung betrifft, so wird hier $\Delta_{\alpha+\beta} = \Delta_{\alpha-\beta}$. Die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Multiplikatorgleichung werden also in dem vorausgesetzten Spezialfalle:

$$M = \bar{n}\sqrt[n]{\frac{\Delta_{\alpha\pm\beta}}{\Delta_\alpha}} \quad \text{bez.} \quad M = \bar{\bar{n}}\sqrt[n]{\frac{\Delta_{\alpha\pm\beta}}{\Delta_\alpha}}$$

Wir wollen eine weitere vereinfachende Annahme hinzufügen. Die beiden (verschiedenen) Faktoren $\bar{n}$ und $\bar{\bar{n}}$ sollen nicht einem Ansatzgitter schlechtweg, sondern speziell dem Hauptgitter angehören. Die Transformationsgleichung besitzt dann wie vorher eine Doppelwurzel, diese Doppelwurzel ist aber überall gleich der Invariante des ursprünglichen Gitters

G_α.

Wir haben

$$f' = f_{\alpha-\beta} = f_{\alpha+\beta} = f_\alpha .$$

Gleichzeitig werden die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Multiplicatorgleichung direct gleich

$$\pi \qquad \text{und} \qquad \bar{\pi}$$

(ev. bis auf hinzutretende 12te ζ Einheitswurzeln).

Nachdem wir so den allgemeinen Fall behandelt haben, wo p in das Product zweier ungleicher Primfactoren zerfällt, mögen wir noch ein paar Worte über den besonderen Fall sagen, wo p gleich dem Quadrate eines sich selbst conjugirten Primfactors

$$p = \bar{\pi}^2$$

wird. Jetzt giebt es unter den durch Transformation p^{ter} Ordnung aus G_α entstehenden Gittern nur ein Idealgitter. Daher ist von den

$p+1$ Wurzeln der Transformationsgleichung nur eine bekannt, nämlich

$$J' = J^{\alpha \pm \beta};$$

ebenso ist von den $p+1$ Werten der Multiplikators nur einer von vornherein angebbar, nämlich

$$M = \pi \sqrt{\frac{\Delta_{\alpha \pm \beta}}{\Delta_\alpha}}$$

Das Gitter G_β, welchem die Zahl π angehört, ist in diesem Falle (vergl. pag. 216) eo ipso ein Ampergitter. Setzen wir dieses noch speziell als das Hauptgitter voraus, so ergeben sich ähnliche Vereinfachungen wie oben.

Hieran schließt sich leicht die Verallgemeinerung auf einen beliebigen Transformationsgrad.

Sei der Transformationsgrad etwa

$$n = p^a q^b \ldots$$

Wir zerlegen die Zahl n in ihre Primfaktoren $\pi, \bar{\pi}, k, \bar{k}$ etc. und

fassen diese auf alle Weisen in das Product zweier conjugirter Zahlen $n = r . \bar{r}$ zusammen; jeder Factor r von n bestimmt nun ein Idealgitter, welcher dem Gitter G_α durch Transformation n^{ter} Ordnung eingelagert ist.

Dementsprechend erhält die Transformationsgleichung bez. die Multiplicatorgleichung ebenso viele bekannte Wurzeln, als es unterschiedene Factoren von n giebt. Gehört etwa r zum Gitter G_β, so sind dieses die Wurzeln

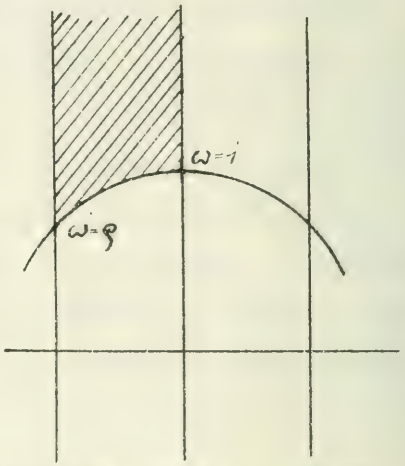
$$J' = J_{\alpha+\beta} \quad \text{bez.} \quad M = r\sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha}}$$

Die Fruchtbarkeit dieser allgemeinen Sätze möge zunächst an einem speciellen Beispiele dargethan werden.

Unter allen Discriminantenwerten sind die einfachsten

$$d = -3 \text{ und } d = -4.$$

Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß sie nur eine Klasse liefern. In unserer Dreiecksfigur entsprechen diesen Werten die Eckpunkte $w = \varrho$ und $w = i$. Es liegt nahe, auch die dritte Ecke des Fundamentaldreiecks heranzuziehen. Diese liegt allerdings auf der Begrenzung der w-Halbebene und entspricht daher einer zerfallenden Form von der Diskriminante $d = 0$. Von den beiden Perioden w_1 und w_2 wird dann die eine unendlich groß. In Folge dessen artet unser parallelogrammatisches Gitter in ein System von Streifen aus. Wir können so von dem Fundamentalbereich der doppeltperiodischen Funktionen zu dem der Exponentialfunktion



und von der Theorie der singulären Moduln zu der Kreisteilungs-theorie.

Es wäre außerordentlich interessant, die Theorie der Kreisteilungsgleichungen unter diesem Gesichtspunkte als Grenzfall der Gleichungen der Transformationstheorie zu behandeln.

Hier beschränken wir uns auf den Fall $d = -3$. In diesem Falle ist $g_2 = 0$ und daher auch $j = 0$. Wir untersuchen also die Transformation desjenigen speziellen elliptischen Gebildes, für welches $g_2 = 0$ ist. Es giebt für $d = -3$ nur dieses eine elliptische Gebilde; h ist also $= 1$.

Der besondere Faktor dieses Gebildes liegt in der relativ großen Anzahl der Einheiten. Für $d = -3$ giebt es die folgenden sechs Einheiten

$$\pm 1, \pm \varrho, \pm \varrho^2,$$

wo

$$\varepsilon = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad , \quad \varepsilon' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

ist. Die Existenz der Einheiten kommt darin zum Ausdrucke, daß das Gitter ein gleichseitiges ist, daß es also bei einer Drehung um 60° mit sich zur Deckung kommt.

Wir haben nun die diesem Gitter eingelagerten Gitter zu betrachten. Die letzteren zerfallen in zwei Kategorien, je nachdem sie selbst bei einer Drehung um 60° mit sich zur Deckung kommen, oder nicht. Im ersten Falle sind sie ihrerseits gleichseitige Gitter, also dem ursprünglichen ähnlich. Nun entstehen aber die dem ursprünglichen ähnlichen Gitter aus jenem durch gleichzeitige Multiplikation der Perioden mit einer Gitterzahl. Diese Gitter sind daher keine anderen als unsere Idealgitter. Was die andere Kategorie

der eingelagerten Gitter betrifft, so muss es zu jedem von ihnen zwei andere Gitter geben, in welche dasselbe successive bei der Drehung um 60° übergeführt wird. Die Gitter der zweiten Kategorie gehören also zu dreien zusammen und gehen bei den Automorphien des Ausgangsgitters cyklisch in einander über.

Hiernach können wir sofort ein eigentümliches Verhalten der Transformationsgleichung voraussehen. Setzen wir nämlich in $F(j', j) = 0$ die Invariante j gleich Null so werden sich je nach der Zerlegbarkeit der Zahl p im Körper $\sqrt{-3}$ keine eine oder zwei Wurzeln, $j' = 0$ abspalten. Die übrigen Wurzeln aber müssen zu dreien einander gleich werden. Nur die erstere Thatsache gehört eigentlich in die Theorie der complexen Multiplication; die

letztere folgt ihrerseits aus der Existenz der Einheiten. Unser Resultat folgt übrigens auch aus der Gestalt des zum Transformationsgrade p gehörigen Fundamentalpolygons; vergl. oben pag.

Wir behandeln der Reihe nach die Primzahlen

$$p = 2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

Von diesen ist (nach pag. 219) 2, 5 und 11 unzerlegbar, die Zahl 3 geht in der Discriminante auf und wird daher gleich dem Quadrat eines Primfactors, multiplicirt mit einer Einheit:

$$3 = -(\varsigma - \varsigma^2)^2.$$

Die Zahlen 7 und 13 sind zerlegbar, z. Bsp. bekommen wir aus einer Zerlegung noch zwei andere (im Wesentlichen allerdings identische) Zerlegungen durch Multiplication mit den (nicht trivialen) Einheiten ς und ς^2. So ergiebt sich:

$7 = (2+\sqrt{-3})(2-\sqrt{-3}) = \frac{1-3\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{1+3\sqrt{-3}}{2} = \frac{5+\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{5-\sqrt{-3}}{2}$

und

$13 = (1+2\sqrt{-3})(1-2\sqrt{-3}) = \frac{7+\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{7-\sqrt{-3}}{2} = \frac{5+3\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{5-3\sqrt{-3}}{2}$

(Daß wir die beiden Factoren immer noch simultan ihr Vorzeichen ändern können, entspricht der „trivialen" Einheit -1.)

Um die zugehörigen Transformationsgleichungen aufzustellen, benutzen wir am besten ein Verfahren, welches in Math. Ann. Bd. 14 pg. 143 angegeben ist. Schließen wir den Fall $p = n$ aus, der uns wegen der Unzerlegbarkeit den Fall n ohnehin nicht interessirt, so wird in allen übrigen Fällen die Transformationsgleichung vom Geschlechte Null, wie man aus der Betrachtung der Transformationspolygone in der s-Ebene folgern kann. Alsdann können wir J und J' als rationale Functionen einer geeigneten Parameter τ bestimmen, der auf dem Polygon jeden Wert nur einmal annimmt;

oder auch, wir können J als rationale Function von τ, J' als rationale Function eines zweiten Parameters τ' bestimmen und zwischen τ und τ' eine lineare Abhängigkeit festsetzen. An der genannten Stelle wird nun gemacht:

$$\left.\begin{aligned} J : J-1 : 1 &= \varphi(\tau) : \chi(\tau) : \psi(\tau) \\ J : J'-1 : 1 &= \varphi(\tau') : \chi(\tau') : \psi(\tau') \end{aligned}\right\} \tau\tau' = \text{const.}$$

Hier sind φ, χ, ψ rationale Functionen $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades. Die vorstehenden Gleichungen vertreten mit Vorteil die Transformationsgleichung $F(J, J') = 0$, (sobald wir noch für J $\frac{j}{1728}$ einsetzen.)

Im Falle der Discriminante $d = -3$ wird nun noch wie erwähnt, $j = 0$. Dies giebt zur Bestimmung von τ die Gleichung $\varphi(\tau) = 0$. Der correspondirende Wert von τ' folgt dann aus $\tau\tau' = \text{const.}$ und der Wert der

transformirten Invariante j' aus der Gleichung $J' = \frac{\varphi(\tau')}{\psi(\tau')}$.

Im Folgenden stellen wir die Gleichung $\varphi(\tau) = 0$ für die Transformationsgrade 2, 3, 5 etc. zusammen und geben gleichzeitig den Zusammenhang der Größe τ mit dem Multiplicator, wie er ebenfalls in Bd. XIV aufgestellt wurde.

$\underline{n = 2}$. Die Gleichung für τ lautet:

$$(4\tau - 1)^3 = 0.$$

Da 2 unzerlegbar, kommt die Idealtheorie bei dieser Transformation nicht weiter zur Geltung. Wohl aber sehen wir, dass die drei transformirten Gitter unter einander congruent werden. Der Uebergang zu τ' wird vermittelt durch

$$\tau\tau' = 1,$$

der Uebergang zu M durch

$$\tau = -\frac{1}{64} M^{12}$$

$\underline{n = 3}$. In diesem Falle geht der Transformationsgrad in der Discriminante auf; es spaltet sich

daher eine Wurzel der Gleichung $\varphi(\bar\tau) = 0$ ab; die drei übrigen werden einander gleich. Wir haben in der That

$$\varphi(\bar\tau) = (\bar\tau - 1)(9\bar\tau - 1)^3 = 0, \quad \bar\tau\bar\tau' = 1.$$

Aus der Wurzel $\bar\tau = 1$ ergiebt sich $\bar\tau' = 1$ und $\varphi(\bar\tau') = 0$, d. h. $J' = 0$. Diese besondere transformirte Gitter ist also dem ursprünglichen ähnlich. Zwischen $\bar\tau$ und M besteht die Gleichung $\bar\tau = \frac{M^6}{27}$; zur Wurzel $\bar\tau = 1$ gehört also der Multiplicator $M^6 = 27$. Nach der allgemeinen Theorie (vergl. pag. 235) wird der Multiplicator in unserem Falle bis auf eine zwölfte Einheitswurzel gleich dem Primfactor von 3, d. h. gleich $\sqrt{-3}$. Hiermit stimmt der so eben angegebene Werth $M^6 = 27$.

$n = 5$. Da 5 unzerlegbar, ist über diesen Fall nur wenig zu bemerken. Die Gleichung 6ten Grades $\varphi(\bar\tau) = 0$ muss zweimal drei gleiche Wurzeln haben. Sie lautet:

$$(\bar{\tau}^2 - 10\bar{\tau} + 5)^3 = 0;$$

ferner wird

$$\bar{\tau}\bar{\tau}' = 125, \quad \bar{\tau} = -M^3.$$

$n = 7$. Da 7 unzerlegbar ist und zwar in zwei ungleiche Primfactoren, giebt es zwei singuläre Kurven der Gleichung $\varphi(\bar{\tau}) = 0$ und im Übrigen zweimal drei gleiche. Unsere Gleichung lautet in der That

$$(\bar{\tau}^2 + 13\bar{\tau} + 49)(\bar{\tau}^2 + 5\bar{\tau} + 1)^3 = 0$$

mit

$$\bar{\tau}\bar{\tau}' = 49 \text{ und } \bar{\tau} = -M^2.$$

Die beiden singulären Werte von $\bar{\tau}$, welche die complexe Multiplication vorhersagt, sind die folgenden

$$\bar{\tau}^2 + 13\bar{\tau} + 49 = 0$$

also

$$\bar{\tau} = -\frac{13 \pm \sqrt{-27}}{2};$$

die zugehörigen Werte von $\bar{\tau}'$ lauten dann offenbar

$$\bar{\tau}' = -\frac{13 \mp \sqrt{-27}}{2}.$$

Wir haben daher, wie es sein muß, $\varphi(\tau') = 0$ und $j' = 0$.

Von dem Werte der Multiplicators wissen wir aus der allgemeinen Theorie, daß er gleich einem der Primfactoren $\bar{\pi}$ der Zahl 7 sein muß, d. h. gleich einer der 6 Zahlen

$$2 \pm \sqrt{-3}, \quad \frac{1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

In der That haben wir nach den vorstehenden Angaben

$$\bar{\iota} = \left(\frac{1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = M.^2$$

$\underline{n = 11}$. Auf den Fall $n = 11$ findet weder die allgemeine Theorie der complexen Multiplication noch der besondere rechnerische Ansatz Anwendung.

$\underline{n = 13}$. Wieder giebt es zwei ein, quläre Wurzeln in der Gleichung

$$\varphi(\bar{\iota}) = (\bar{\iota}^2 + 5\bar{\iota} + 13)(\bar{\iota}^4 + 7\bar{\iota}^3 + 20\bar{\iota}^2 + 19\bar{\iota} + 1)^3 = 0.$$

Es sind dieser die Werte

$$\bar{\iota} = \frac{-5 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

Ferner haben wir

$$\bar{\tau}\,\bar{\tau}' = 13 \quad , \quad \bar{\tau} = M.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\bar{\tau}' = \frac{-5 \mp \sqrt{-27}}{2}$$

und $\varphi(\bar{\tau}') = 0$, wie es sein muss. Auch die Werte der Multiplikatoren stimmen mit der allgemeinen Theorie, da sie gleich geeigneten Primteilern von 13 werden:

$$M = -\frac{5 \mp \sqrt{-27}}{2}$$

In der Hurwitz'schen Dissertation ist die Discriminante -3 für alle möglichen Transformationsgrade durchdiscutirt. Es ergiebt sich dabei der allgemeine Satz (in Uebereinstimmung mit pag. 235).

Jedem Factor r des Transformationsgrades n entspricht eine Wurzel der Multiplicatorgleichung, welche gerade gleich V^r ist. Die übrigen Wurzeln der Multiplicatorgleichung sind dreifach.

Hurwitz giebt die entsprechenden

Entwickelungen auch noch im Falle $d = -4$, d. h. für die zweite Ecke der Fundamentaldreiecke, wo $g_3 = 0$ und daher $J = 1$ ist.

16. VII 96. Das allgemeine Ziel, welches wir bei den folgenden Entwickelungen im Auge haben, soll dieses sein:

Näheres über die Natur der singulären Invarianten j, welche zu dem vorgegebenen Werte $-\nabla$ gehören, zu erfahren.

Wir werden uns dabei in erster Linie auf die Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ stützen, in zweiter Linie auch auf die Multiplikatorgleichung $\Phi(M, j) = 0$.

Wir fragen uns vor allen Dingen wann in der Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ für irgend einen Transformationsgrad n $j' = j$ werden kann. Wir betrachten also die Gleichung:

$$F(j, j) = 0$$

und haben damit den Ausgangspunkt der Kroneckerschen Ent

wickelungen, nur daß Kronecker nicht das j, sondern das k' oder auch $k^2(1-k^2)$ etc. als fundamentalen Modul benutzt.

Zunächst erkennt man leicht, daß unsere Gleichung lauter singuläre Invarianten j definirt.

Sei nämlich w der zu dem Werte j gehörige Periodenquotient, welcher bis auf Transformationen erster Ordnung bestimmt ist. Durch Transformation n^{ter} Ordnung entstehe aus w der Werth

$$w' = \frac{aw+b}{cw+d}, \quad ad - bc = n.$$

Soll nun $j' = f(w')$ mit $j = f(w)$ zusammenfallen, so muß w' mit w aequivalent sein. Wir können in der letzten Gleichung direct $w' = w$ setzen, indem wir die Transformation erster Ordnung, durch welche w' aus w erhalten wird, auf die rechte Seite der Gleichung werfen, und die Bedeutung der

Zahlen a, b, c, d dementsprechend in passender Weise abändern. Wir erhalten so für w die folgende ganzzahlige Gleichung

$$c w^2 + (d-a) w - b = 0.$$

Die zugehörigen Werte von j sind daher sicher singuläre Invarianten. Wir haben bereits pg. 234 einen Fall kennen gelernt, indem eine Wurzel j' der Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ speziell gleich j wird. Dieser trat dann ein, wenn der „Transformationsgrad" p in zwei Faktoren π und $\bar{\pi}$ zerfällt, welche in dem zu der Diskriminante $-\nabla$ gehörigen Hauptgitter liegen. Aus dem Satze von pag. 230 ergiebt sich leicht, daß auch das Umgekehrte richtig ist. Soll nämlich j' überhaupt gleich einer Invariante werden, welche zu derselben Diskriminante gehört, wie $j = j_\alpha$, so muß sich p in dem Gitter G_β zerlegen lassen und j' einen der Werte $j_{\alpha-\beta}$ oder

$j_{\alpha+\beta}$ haben. Soll nun speziell $j' = j_\alpha$ werden, so muss ζ_β das Hauptgitter werden, p also durch die zu $-\nabla$ gl. hörige Hauptform darstellbar sein. Uebertragen wir dieses Resultat von dem Primzahlgrade p auf einen beliebigen Grad n, so werden wir den Satz aufstellen:

Soll in der Transformationsgleichung $j' = j$ werden, so muss der Transformationsgrad n durch die Hauptform derjenigen Discriminante $-\nabla$ darstellbar sein, welche zu j gehört. Es wird in unserer Gleichung so viele Wurzeln $j' = j$ geben, als verschiedene Zerlegungen $n = \nu\bar{\nu}$ in dem betr. Hauptgitter möglich sind.

Der vorstehende Satz läßt sich auch ganz direct beweisen. Soll j der Gleichung $F(j, j) = 0$ genügen, so muss nach dem oben Gesagten ein zu j gehöriger Wert w eine Relation:

$$w = \frac{a w + b}{c w + d}, \quad ad - bc = n$$

befriedigen.

Schreiben wir dieselbe in Form einer quadratischen Gleichung

$$c w^2 + (d-a) w + b = 0,$$

so werden im Allgemeinen c, $d-a$, b einen gemeinsamen Teiler, sagen wir u, haben, nach dessen Fortschaffung die Gleichung lauten möge:

$$P w^2 + Q w + R = 0,$$

so dass wir haben

$$c = Pu, \quad d-a = Qu, \quad -b = Ru.$$

Setzen wir noch $a+d = t$, so können wir die vier Coefficienten a, b, c, d durch die Coefficienten unserer quadratischen Gleichung und t ausdrücken:

$$a = \frac{t-Qu}{2}, \quad b = -Ru, \quad c = Pu, \quad d = \frac{t+Qu}{2}.$$

Nun muss aber $ad - bc = n$ sein oder, wenn wir die Discriminante von $Pw^2 + Qw + R = 0$ mit $-\nabla$ be-

zeichnen:

$$\frac{t^2 + \nabla u^2}{4} = n.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber leicht, wie eine kleine Umrechnung zeigt dass n durch die zu $-\nabla$ gehörige Hauptform darstellbar ist und zwar einer, bei ob ∇ durch 4 teilbar ist oder nicht. Umgekehrt erkennt man, dass jede Lösung unserer Gleichung eine Transformation n-ter Ordnung bestimmt, welche die Form f in sich verwandelt. Diese Aussage deckt sich aber mit dem zweiten Teile unseres Satzes.

Allerdings werden die so erhaltenen Transformationen n-ter Ordnung, wenn n einen quadratischen Teiler τ^2 enthält, zum Teil uneigentliche Transformationen sein können. Haben wir nämlich ein Lösungssystem t, u mit dem gemeinschaftlichen Teiler τ, so tritt derselbe Teiler auch in a, b, c, d auf. Da wir aber bei der Auf-

stellung der Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ nur eigentliche Transformationen berücksichtigt haben, so sind die entsprechenden Werte von j als Wurzeln unserer Gleichung nicht mitzuzählen.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Anzahl der Wurzeln von $F(j, j) = 0$ zu bestimmen. Zu dem Zwecke suchen wir uns die Anzahl der inäquivalenten ω, zu denen unsere j gehören. An sich gehören natürlich zu jedem j unendlich viele ω, von diesen können wir aber jedesmal ein reduzirtes ω isoliren. Aus der Anzahl dieser reduzirten ω wird dann die Anzahl der gesuchten j leicht folgen.

Wir haben also jetzt alle Gitter aufzusuchen, zu denen quadratische Formen $(c, d-a, b)$ gehören, deren Coefficienten die Relation $ad - bc = n$ zu befriedigen gestatten. Zu diesem Zwecke untersuchen wir zuvör.

derot, welche Werte die Diskriminanten unserer Gitter annehmen können. Wir haben dieselben bisher mit $-\nabla u^2$ bezeichnet, wollen jetzt aber einfach $(-\nabla)$ dafür schreiben, indem wir $u = 1$ setzen, wozu keinen Irrtümern Anlass geben wird. Natürlich können jetzt die Zahlen P, Q, R auch einen gemeinsamen Teiler haben.

Der Wert ∇ muss dann, wie gezeigt ist, so gewählt werden, dass

$$n = \frac{t^2 + \nabla}{4}$$

gemacht werden kann, d. h. es muss sein

$$\nabla = 4n - t^2$$

Da ∇ positiv sein muss, können wir hier für t setzen:

$$t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm E(2\sqrt{n}).$$

Die sämmtlichen Diskriminantenwerte, zu denen unsere gesuchten Gitter gehören, sind also:

$4n,\ 4n-1,\ 4n-4 \ldots 4n-[\varepsilon(2\sqrt{n})]$.

Zu jedem Werte von $-\nabla$ gehören nun eine Anzahl reducirter Formen (P, Q, R) [denn nur diese brauchen wir zu beachten, da wir ja nach Gittern und nicht nach Formen fragen], die uns mit Hülfe der Größe t ein System von Coefficienten a, b, c, d zu berechnen gestatten. Wir haben nämlich:

$$a = \frac{t-Q}{2} \qquad b = -R \qquad c = P \qquad d = \frac{t+Q}{2}$$

Jede reducirte Form liefert also, je nachdem $t = 0$ oder $|t| > 0$ ist, ein oder zwei Coefficientensysteme. Dementsprechend hat die Gleichung $F(f(w), f'(w)) = 0$ eine einfache Wurzel im Falle $t = 0$, eine doppelte im Falle $|t| > 0$.

Hierbei ist abermals zu bemerken, daß sich die Gleichung $F(f', f) = 0$ nur auf eigentliche Transformationen bezieht. Wir müssen daher unterscheiden zwischen solchen Wer-

ten von t, für welche die Coefficienten

$$\frac{t-a}{2},\quad -R,\quad P,\quad \frac{t+a}{2}$$

teilerfremd und zwischen solchen, für welche sie teilerhaltig sind.

Wir können jetzt direct die Anzahl der Wurzeln unserer Gleichung $F(x,1)=0$ abzählen. Wir bezeichneten früher mit $h(\nabla)$ die Zahl der primitiven, mit $H(\nabla)$ die Zahl aller Klassen quadratischer Formen, welche zur Discriminante $-\nabla$ gehören. Ausserdem führen wir noch die Bezeichnung $H'(\nabla)$ für die Anzahl derjenigen Classen (P, a, R) der Discriminante $-\nabla$ ein, für welche die Zahlen

$$\frac{t+a}{2},\quad P \text{ und } R$$

teilerfremd sind. Alsdann folgt aus der soeben beschriebenen Aufzählung der Verschwindungspunkte von $F(x,1)$ in der w-Ebene, dass

ihre Anzahl gleich

$$H'(4n) + 2H'(4n-1) + 2H'(4n-4) + \text{etc.} + 2H'(4n - \varepsilon^2 n)$$

oder kürzer geschrieben gleich

$$\sum H'(4n - t^2)$$

wird, wo t die Werte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \varepsilon(\sqrt{n})$ durchläuft.

Unsere Abzählung bezog sich auf den reducirten Raum der w-Ebene. Die vorstehende Formel giebt die Anzahl derjenigen reducirten w, für welche $F(j(w), j(w)) = 0$ ist. Wir wünschen aber vielmehr den in j genommenen Grad der Gleichung $F(j, j) = 0$ zu kennen, d. h. die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung in der j-Ebene zu bestimmen. Zu diesem Zwecke müssen wir uns die conforme Abbildung der einzelnen w-Dreiecke auf die j-Ebene gegenwärtig halten. Nach Früherem wird im Allgemeinen die Umgebung jeder Stelle w

auf die j- Ebene eindeutig abgebildet. Nur die Punkte $\omega = i$ bez $\omega = \varrho$ liefern eine zweifache bez. eine dreifache Ueberdeckung der zugehörigen Stellen $j = 1728$ bez $j = 0$. Ein einfacher Nullpunkt $\omega - i$ bez. $\omega = \varrho$ ist daher in der j- Ebene mit der Multiplicität $\frac{1}{2}$ bez. $\frac{1}{3}$ zu rechnen. Dem Werthe $j = 1728$ entspricht die quadratische Gleichung $\omega^2 + 1 = 0$ d. h. die quadratische Form $(P, 0, P)$; andrerseits gehört zu dem Werthe $j = 0$ die quadratische Gleichung $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, d. h. die Form (P, P, P). Hiernach müssen wir sagen:

Die Anzahl der Wurzeln von $F(\omega, j) = 0$ in der j- Ebene ist ebenfalls gegeben durch

$$\sum H'(4n - t^2);$$

nur haben wir jetzt bei der Auswerthung dieser Summe die Classen $(P, 0, P)$ mit der Hälfte, die Classen (P, P, P) mit dem dritten Theile der zunächst sich erge-

beiden Anzahlen in Rechnung zu setzen.

Wir wollen dieselbe Thatsache noch etwas anders ausdrücken, indem wir von der Riemann'schen Fläche $F(s', s) = 0$ sprechen. Auf dieser Fläche befindet sich jedes Wertepaar (s', s) durch einen und nur durch einen Punkt vertreten. Wir fassen nun diejenigen Stellen in's Auge, in welchen die auf der Fläche eindeutige Function $s' - s$ verschwindet. Die Anzahl dieser, mit der richtigen Multiplicität gezählten, Stellen stimmt genau mit dem soeben bestimmten Grade der Gleichung $F(s, s) = 0$ überein.

Nach den früheren Erörterungen über das Transformationspolygon in der w-Ebene kennen wir nämlich die Riemann'sche Fläche $F(s', s) = 0$. Dieselbe entsteht aus jenem Polygon durch Zusammenbiegen der Ränder und hat Verzweigungspunkte nur in den Stellen $s = 0$,

1728 und ∞, welche den Ecken der Fundamentaldreiecke in der w-Ebene entsprechen. Hiernach findet sich jede von ∞, 0 und 1728 verschiedene Stelle der j-Ebene auf den verschiedenen Blättern der Riemann'schen Fläche in conformer Uebertragung vor. Haben wir also in der j-Ebene eine Wurzel der Gleichung $F(j,j)=0$, von gewisser Multiplicität, so haben wir auf der Riemann'schen Fläche $F(j',j)=0$ eine Verzweigungsstelle $j'-j=0$ von derselben Multiplicität. Hier gilt zunächst unter der Voraussetzung $j \neq 0$ oder 1728. (die Stelle $j=\infty$ kommt für unsere Frage überhaupt nicht in Betracht). Betrachten wir nun die Stellen $j=0$ und $j=1728$. Hier ist die j-Ebene allgemein zu zweien von drei bez. von zweifachen Windungspunkten unserer Riemann'schen Fläche überdeckt.

Wir behaupten aber, daß an

diesen Stellen ausserdem eine Anzahl unverzweigter Blätter verlaufen und dass diese gerade die uns interessirenden Wertepaare $(0,0)$ bez. $(1728, 1728)$ tragen. Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus den Reihenentwickelungen von j und j' in der w-Ebene. Wir haben einerseits für die dem Werte $j = 0$ benachbarten Werte die Entwickelung $j = c_1 (w-\varsigma)^3 + c_2 (w-\varsigma)^6 + \ldots$

Gleichzeitig erhalten wir durch Transformation n^{ter} Ordnung für j', falls j' mit j zusammenfällt, die folgende Entwickelung $j' = c_1' (w-\varsigma)^3 + c_2' (w-\varsigma)^6 \ldots$

Durch Elimination von w ergiebt sich für j eine nach ganzen Potenzen von j' und ebenso für j' eine nach ganzen Potenzen von j fortschreitende Entwickelung. Dieselbe zeigt, dass derjenige Blatt der Riemann'schen Fläche, welcher die Stelle $j = 0$, $j' = 0$ trägt, an dieser Stelle unverzweigt ist. Das Entsprechende gilt für die Stelle $j = 1728$, $j' = 1728$. Hiernach ist klar, dass sich die

Nullpunkte von der j - Ebene mit ungeänderter Multiplicität auf die Riemann'sche Fläche übertragen.

Mithin hat die Function $j' - j$ auf unserer Riemann'schen Fläche soviele Nullstellen, als die Gleichung $F(j, j) = 0$ in der j - Ebene Wurzeln besitzt, nämlich

$$\sum H'(4n - t^2),$$

wobei für die Berechnung dieser Summe die Bemerkungen von pag. in Kraft bleiben.

Wir schließen hier einen kleinen Excurs über die sogenannten Kronecker'schen Classenzahlrelationen an, welche interessante Beziehungen zwischen verschiedenen zahlentheoretischen Functionen ergeben.

In unserer Endformel werden wir wünschen, statt der Klassen-

Zahlen Hb', deren Definition (vergl. pg. 259) eine etwas künstliche war, die Klassenzahlen Hb, d. h. die Anzahlen aller primitiven oder imprimitiven Classen derselben Discriminante figuriren zu sehen.

Wir erreichen dieses dadurch, daß wir zu der bisherigen Transformationsgleichung $F(J', J) = 0$ (ausführlicher geschrieben: $F_n(J', J) = 0$, da es sich um alle eigentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung handelt) die sämmtlichen Gleichungen

$$F_{\frac{n}{\tau^2}}(J', J) = 0 ,$$

wo τ die sämmtlichen quadratischen Theiler von n durchläuft, hinzunehmen.

Jede einzelne dieser Gleichungen liefert die eigentlichen Transformationen von der Ordnung $\frac{n}{\tau^2}$ oder wie wir sagen können, die zu

eigentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung mit dem gemeinsamen Factor $\bar{\tau}$. Alle Werthe von j, welche bei diesen uneigentlichen Transformationen in sich übergehen, werden durch die Gleichung

$$F_{\frac{n}{\bar{\tau}^2}}(j, J) = 0$$

erhalten. Mithin bekommen wir die Gesammtheit aller Werthe j, welche bei den eigentlichen und uneigentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung ungeändert bleiben aus der Gleichung

$$\prod_{(\bar{\tau})} F_{\frac{n}{\bar{\tau}^2}}(j, J) = 0.$$

Der Grad dieser Gleichung ergiebt sich sofort aus dem Grade von $F_n(j, J) = 0$. Da der letztere gleich $\sum' H'(4n - t^2)$ war, so wird der erstere ersichtlich

gleich

$$\Sigma H(4n - t^2).$$

Wir haben nämlich jetzt einfach die Nichtteilbarkeitsbedingung von pg 259 unberücksichtigt zu lassen und dementsprechend H' durch H zu ersetzen.

Diese Formel bedarf einer Ergänzung, wenn n eine reine Quadratzahl ist. In diesem Falle müssen wir jedenfalls festsetzen, daß bei der Bildung unserer Gleichung $\prod^{(i)} F_n(j,j) = 0$ nur solche Zahlen $\bar{t}$ benutzt werden, welche kleiner als $(\sqrt{n})$ sind. Wollten wir nämlich $\bar{t} = \sqrt{n}$ setzen, so würde in unserer Gleichung der Factor

$$F_1(j,j)$$

vorkommen, welcher, da j bei beliebigen Transformationen erster Ordnung ungeändert bleibt, identisch verschwinden würde.

Dementsprechend werden wir auch bei der Berechnung von

$\Sigma H(4n - t^2)$ diejenigen Classen (P, Q, R) nicht mitzählen dürfen, welche bei einer Transformation erster Ordnung ungeändert bleiben. Die Discussion der Pell'schen Gleichung, die jetzt auf die gewöhnliche Form

$$\frac{t^2 + \nabla u^2}{4} = 1$$

zurückkommt, zeigt, dass in unserer Summe 3 solche Classen vorkommen, nämlich $u = 1$, $\nabla = 3$, $t = \pm 1$ und $u = 1$, $\nabla = 4$, $t = 0$. Ersichtlich liefern die beiden ersten Lösungen als zugehörige Invariante $j = 0$, die dritte $j = 1728$. Zu dem Werthe ΣH würden die beiden ersten nach unserer früheren Verabredung $2/3$, die dritte $1/2$ Einheiten beitragen. Diesen Betrag haben wir also in Abzug zu bringen. Mithin wird der Grad der Gleichung $\pi f = 0$, im Falle n ein vollständiger Quadrat ist, gleich

$$\Sigma H(4n - t^2) - 7/6.$$

Die somit bestimmte Anzahl berechnen wir jetzt noch auf eine zweite Weise. Wir knüpfen dabei an die Riemann'sche Fläche an, welche zu der Gleichung $\Pi F(j', j) = 0$ gehört. Diese Fläche besteht aus der Uebereinanderlagerung einer Reihe einzelner Riemann'scher Flächen, welche bez. durch die Gleichung $F_{\frac{n}{\nu^2}}(j', j) = 0$ gegeben sind und deren Charakter wir pg. 262 ff. studirt haben. Die fragliche Anzahl ist nun gleich der Zahl der Verschwindungspunkte von $j' - j$ auf der so entstehenden Gesammtfläche. Andrerseits wissen wir aus der Functionentheorie, dass die Zahl der Verschwindungspunkte einer algebraischen Function gleich ist der Zahl ihrer Unendlichkeitspunkte. Die Unendlichkeitsstellen von $j' - j$ liegen sämmtlich bei $j = \infty$. Ihre Anzahl sowie ihre Verteilung auf die verschiedenen Blätter der Fläche lassen sich aus den bekannten

nach $u = e^{2i\pi w}$ fortschreitenden Reihen von j' ablesen. Es ergiebt sich als Resultat, wie wir hier nur historisch anführen:

Die Anzahl der bei $j = \infty$ in den verschiedenen Blättern liegenden Unendlichkeitsstellen beträgt:

1. Wenn n keine Quadratzahl ist

$$\Phi(n) + \Psi(n),$$

2. wenn aber n gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl ist:

$$\Phi(n) + \Psi(n) - 1.$$

Hier verstehen wir unter $\Phi(n)$ die Theilersumme von n, so dass, unter δ einen beliebigen Theiler von n verstanden,

$$\Phi(n) = \Sigma\delta$$

wird. Ferner wird

$$\Psi(n) = \Sigma\delta' - \Sigma\delta'',$$

wo δ' bez. δ'' diejenigen Theiler

zu durchlaufen haben, welche größer bez. kleiner als Tu sind.

Durch Vergleich unserer Formeln für die Null- und Unendlichkeitsstellen kommen wir zu der folgenden merkwürdigen Relation:

1. im Falle einer allgemeinen n:

$$H(4n) + 2H(4n-1) + 2H(4n-4) + \dots$$
$$2H(4n-t^2) = P(n) + \Psi(n).[t - 2E(\sqrt{n})].$$

2. im Falle einer quadratischen n:

$$H(4n) + 2H(4n-1) + 2H(4n-4) + \dots 2H(4n-t^2)$$
$$- 7/6 = P(n) + \Psi(n) - 1.[t = 2\sqrt{n} - 1].$$

Wir bezeichnen diese Relationen als Klassenzahlrelationen erster Stufe, im Gegensatz zu den Klassenzahlrelationen höherer Stufe, welche wir später kennen lernen werden. Die letzteren werden wir aus den Invarianten der höheren Stufen ähnlich ableiten, wie die vorstehenden aus der Invariante j.

Unsere Relationen sind zuerst von Kronecker im Jahre 1858 aufge-

stellt; später sind sie in's Besondere von Gierster entwickelt worden. Vergl. hierzu die historischen Bemerkungen in Modulf. II, Abschn. 4. Cap. 5 und 6 pag. 160 ff.

Das Interesse der Klassenzahlrelationen besteht in erster Linie darin, dass sie die complicirte zahlentheoretische Function H mit den elementaren Functionen P und Y in Beziehung setzt und die erstere aus den letzteren zu berechnen gestattet.

Zu den beiden soeben unterschiedenen Fällen (n allgemein und n quadratisch) geben wir je ein numerisches Beispiel.

1. $n = 12$.

Die linke Seite unserer Relation besteht aus den Termen:

$$H(48) + 2H(47) + 2H(44) + 2H(39) + 2H(32) + 2H(23) + 2H(12).$$

Die Zahlen H reduciren wir zunächst durch Abspalten der quadratischen Teiler auf die Zahlen h. So ergiebt sich z. B.

$H(48) = h(48) + h(12) + h(3)$.

Die Zahlen h ihrerseits entnehmen wir aus den Cayley'schen Tabellen, wobei wir nur berücksichtigen müssen, daß nach unserer Verabredung die Anzahl der Classen (P, P, P) bez. P, 0, P) mit 1/3 bez. 1/2 zu multipliciren ist.

Zu solcher Weise finden wir:

$H(48) = h(48) + h(12) + h(3)$		$= 2 + 1 + 1/3$
$2H(47) = 2h(47)$		$= 10$
$2H(44) = 2h(44) + 2h(11)$		$= 6 + 2$
$2H(39) = 2h(39)$		$= 8$
$2H(32) = 2h(32) + 2h(8)$		$= 4 + 2$
$2H(23) = 2h(23)$		$= 6$
$2H(12) = 2h(12) + 2h(3)$		$= 2 + 2/3$

Zu Summa $= 44$.

Andererseits haben wir

$P(12) = 12 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$
$\Psi(n) = 12 + 6 + 4 - 3 - 2 - 1 = 16$

Zu Summa 44

2. $n = 16$.

Hier haben wir zunächst zu berechnen

$H(64) + 2H(63) + 2H(60) + 2H(55) + 2H(48) + 2H(39) + 2H(28) + 2H(15)$.

Aus den Cayley'schen Tabellen ergiebt sich mit Rücksicht auf unsere Verabredungen:

$H(64) = h(64) + h(16) + h(4)$	$= 2 + 1 + 1/2$
$2H(63) = 2h(63) + 2h(7)$	$= 8 + 2$
$2H(60) = 2h(60) + 2h(15)$	$= 4 + 4$
$2H(55) = 2h(55)$	$= 8$
$2H(48) = 2h(48) + 2h(12) + 2h(3)$	$= 4 + 2 + 2/3$
$2H(39) = 2h(39)$	$= 8$
$2H(28) = 2h(28) + 2h(7)$	$= 2 + 2$
$2H(15) = 2h(15)$	$= 4$

In Summa $52\ 1/6$

Die linke Seite der Klassenzahlrelation beträgt daher wegen der Subtrahenten $7/6 : \underline{51}$.

Andererseits wird

$\Phi(n) = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 \qquad = 31$

$\Psi(n)-1 = 16 + 8 \quad -2-1-1 \qquad = 20$

Die rechte Seite unserer Relation giebt also wirklich gleichfalls

$$31 + 20 = \underline{51}.$$

Nach diesem Exkurse kehren wir zu der Gleichung $F(j,j)=0$ zurück. Wir haben pg. 258 die Wurzeln dieser Gleichung in eine Reihe von Kategorien gespalten, je nach den zugehörigen Werten der Discriminante $-\nabla$. Die bezüglichen Werte waren

$\nabla = 4n,\ 4n-1,\ 4n-4,$ etc.

Die Wurzeln der 1ten (zu $\nabla = 4n$) gehörigen Kategorie waren einfache, die der übrigen doppelte Wurzeln unserer Gleichung.*) Wir werden uns nun die linke Seite von $F(j,j)=0$

---

*) Hierbei ist der Kürze halber von der etwaigen Multiplicität der Wurzeln $j=0$ und $j=1728$ abgesehen.

in ebenso viele Bestandteile gespal-
ten denken, als es verschiedene
Kategorien giebt. Wir können et-
wa schreiben:

$$1)\quad F(j,j) = X'_{4n}(j)\cdot[X'_{4n-1}(j)]^2 \cdot$$
$$\cdot[X'_{4n-4}(j)]^2\cdot[\ldots].$$

Der Grad des einzelnen Bestandteiles
in j beträgt nach pg. 259 bez.

$$H'(4n),\ H'(4n-1),\ H'(4n-4),\ldots$$

Neben den Ausdrücken X' führen
wir sogleich gewisse ähnlich gebau-
te Ausdrücke χ und χ ein, welche zu
H und h in demselben Verhältnis
stehen wie X' zu H'. Es soll näm-
lich $\chi_\nabla(j)$ gleich Null gesetzt, alle
diejenigen in der Anzahl H' vor-
handenen Invarianten primitiver
oder imprimitiver Klassen liefern,
welche zur Discriminante $-\nabla$ ge-
hören. Ebenso soll $\chi_\nabla(j) = 0$ die
in der Anzahl h vorhande-

neu Invarianten primitiver Classen von der Discriminante $-\nabla$ bestimmen. Die Gleichung $\chi_\nabla(j)=0$ bez. $\chi'_\nabla(j)=0$ werden wir als (primitive bez. imprimitive) Classengleichung bezeichnen

Natürlich steckt χ_∇ in χ'_∇ und dieser in χ_∇ als ein Factor.

Unser Ziel soll es nun sein, durch Benutzung der zu den verschiedenen Werthen von n gehörigen Gleichungen $Fn(j,j)=0$ für jedes ∇ eine Classengleichung $\chi_\nabla(j)=0$ zu isoliren. Das Hauptresultat dieser Untersuchung wird folgendes sein. Die Classengleichung ist ebenso wie die Transformationsgleichung eine ganzzahlige algebraische Gleichung deren höchster Coefficient der Einheit gleichkommt.

Zuvörderst wollen wir an der Gleichung 1) eine kleine Vereinfachung vornehmen. Wir wollen nämlich rechts und links diejenigen Factoren fortheben, welche

zu den Discriminanten $-\nabla = -3$ und $-\nabla = -4$ gehören, oder zu solchen Discriminanten, die sich von -3 und -4 nur um einen quadratischen Factor unterscheiden. Die entsprechenden Werthe von j sind $j = 0$ und $j = 1728$. Diese Werthe von j machten uns früher bei der Abzählung der Grade der Transformationsgleichung Schwierigkeiten, überdies interessiren sie uns jetzt nicht mehr, insofern wir uns mit der Gleichung $\lambda_\nu(j) = 0$ begnügen wollen. Die in solcher Weise durch Forthebung des Factoren (j) und $(j - 1728)$ vereinfachte Gleichung mögen wir etwa die „gereinigte Transformationsgleichung" nennen.

Wir führen nun den Nachweis, dass wir die einzelne Classengleichung $\lambda_\nu(j)$ stets mittelst rationaler Processe aus unserer gereinigten Transformati-

ongleichungen herstellen können. Wir wollen zu dem Zweck voraussetzen, dass dies bereits für alle $\nabla \leq 4n-4$ geschehen sei, und werden jetzt beweisen, dass wir dann auch die Classengleichungen für $\nabla = 4n-1$ und $\nabla = 4n$ rational berechnen können. Wir bilden:

$$F_{4n}(j,J) = X'_{4n}(J)[X_{4n-1}(J)]^2[X'_{4n-4}(J)]^2 \ldots$$

Hier sind, wie man sofort aus unserer Annahme schliesst, alle Factoren von $[X'_{4n-4}(J)]^2$ an rational bekannt, wir können daher

$$X'_{4n}(J)[X'_{4n-1}(J)]^2$$

durch einfache Division berechnen.

Stellt man jetzt die grossen $\mathfrak{P}$ durch die kleinen $\mathfrak{p}$ dar und ordnet die letzteren nach der Grösse der zu-

gehörigen Determinanten, so werden die Anfangsglieder des letzten Produkts offenbar $\chi_{4n}^{r}(\chi_{4n-1})^{2}$. Was noch folgt, sind lauter Factoren χ für kleinere Determinanten. Da wir diese als rational bekannt angesehen haben, können wir sie einfach fortlassen; es ist somit auch das Produkt $\chi_4 \ (\chi_{4n-1})^2$ rational herstellbar.

Bemerken wir jetzt noch, daß die Gleichung χ_{4n} keine Doppelwurzel besitzt, so ergiebt sich nach bekannten Sätzen der Gleichungstheorie sofort, daß man aus dem Produkt $\chi_{4n}(\chi_{4n-1})^2$ rational die Factoren χ_{4n} und χ_{4n-1} abspalten kann, was wir zeigen wollten.

Um unseren Beweis vollständig zu machen, zeigen wir jetzt noch, daß χ_8 und χ_7 rational berechnet werden können. Bilden wir nämlich $F_2(j,J)$, so ergiebt sich:

$$F_2(j,J) = \chi_8(j)\,[\chi_7'(j)]^2,$$

indem wir die Determinanten -4, -3 unberücksichtigt lassen. Nun ist weiter

$$\chi_8'(j) = \chi_8(j), \quad \chi_7'(j) = \chi_7(j),$$

immer unter der Voraussetzung, dass wir $\chi_4(j)$ und $\chi_3(j)$ unterdrücken.

Es folgt also

$$F_2(j,1) = \chi_8(j)\left[\chi_7(j)\right]^2.$$

Damit ist aber gezeigt, dass $\chi_8(j)$ und $\chi_7(j)$ rational berechnet werden können. Uebrigens sind $\chi_8(j) = 0$ und $\chi_7(j) = 0$ sogar Gleichungen ersten Grades, also die zugehörigen j rational, da sowohl für $\nabla = 8$ wie für $\nabla = 7$ nur eine Classe existirt.

Wir gewinnen so ganz allgemein das Resultat.

Die Gleichung h^{ten} Grades $\chi_\nabla(j) = 0$ welche die h zur Discriminante $-\nabla'$ gehörigen singulären j bestimmt, ist eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten.

Wir behaupten aber ferner:
Der Coefficient des höchsten Gliedes in dieser Gleichung ist gleich 1.
Der Beweis läßt sich so führen, daß man zunächst zeigt: Das höchste Glied der Gleichung $F(j,j')=0$ hat zum Coefficienten die Einheit. Dies gelingt in der Weise, daß man sich das Bildungsgesetz der Coefficienten von $F(j,j')$ aus den Reihenentwickelungen von j und j' nach Potenzen von r klar macht. Zunächst erkennt man, solange n kein voller Quadrat ist, daß der höchste Coefficient an sich gleich 1 wird. Ist aber n ein volles Quadrat, so wird der höchste Coefficient zwar gleich Vn, gleichzeitig nehmen aber auch alle übrigen Coefficienten den Factor Vn an, so daß wir nach Forthebung desselben wieder als ersten Coefficienten die Eins übrig behalten. –
Bei der Zerlegung der Gl. $F=0$ in die einzelnen Teilgleichungen

$\lambda' = 0$ geht nun offenbar die Eigenschaft, die Einheit zum höchsten Coefficienten zu haben, auf alle Teilgleichungen über.

Es ist dies hier nicht weiter auszuführen, weil es algebraisch ganz einfach ist.

Wir mögen dieses Resultat so ausdrücken, dass wir sagen:

Die h singulären Werthe von j sind nicht nur algebraische Zahlen schlechtweg, sondern sie sind ganze algebraische Zahlen. –

Das Verfahren, welches wir bei der Aufstellung der Classengleichung befolgten, ist allerdings ein rein theoretisches. Für die numerische Durchführung wäre es sehr unpraktisch, von der Transformationsgleichung der j seinen Ausgang zu nehmen, weil die Gleichung, wie wir sahen, schon für kleine Transformationsgrade ungeheuer complicirt ist. Hier treten die Moduln höherer Stufe in ihr Recht, wie weiter unten

noch näher auszuführen.

Wir theilen die Classengleichung für die allereinfachsten Fälle

$$\nabla = 3, 4, 7, 8$$

im Anschlusse an Weber mit. Zu den beiden ersten Fällen lautet sie natürlich

$$j = 0 \text{ und } j - 1728 = 0.$$

Auch in den beiden folgenden Fällen ist noch $h = 1$. Man findet hier als Classengleichung:

$$j + 3375 = 0 \text{ bez. } j - 8000 = 0$$

§. 96. Unsere nächste Aufgabe soll es jetzt sein die Classengleichung $\chi_\nabla = 0$ näher zu studiren.

Im Allgemeinen kann man bei der Untersuchung einer algebraischen Gleichung zwei verschiedene Gesichtspunkte verfolgen. Man kann sich entweder die Aufgabe stellen, die Wurzeln der Gleichung zu separiren, sie numerisch mit vorgegebener Genauigkeit zu berechnen;

ein Ausschluss hieran wird man die Frage entscheiden, wie viele Wurzeln reell werden etc. Andererseits kann man die Gleichung daraufhin untersuchen, ob sie durch Wurzelzeichen lösbar ist, oder, wenn dieses nicht der Fall ist, welcher die einfachsten Irrationalitäten sind, mit deren Hülfe die Gleichung sich reduciren lässt. Die erste Art der Fragestellung bezeichnet man wohl als die numerische, die zweite als die algebraische Auflösung der Gleichungen.

Was die erste Art der Untersuchung betrifft, so ist dieselbe bei unserer Classengleichung eigentlich schon implicite erledigt. Indem wir die zu der vorgelegten Discriminante $-\nabla$ gehörigen reducirten Formen pw^2+qw+r aufzählen, bekommen wir durch Ausschneiden derselben eine Anzahl von Punkten ω in dem reducirten

Dreiecke der Modulteilung. Die Trennung der Wurzeln unserer Gleichung ist damit geleistet. Von den Werten w kommen wir mittelst der bekannten Potenzentwickelungen zu den zugehörigen Werten von j. Diese lassen sich hiernach mit beliebiger Genauigkeit numerisch berechnen. Auch die Frage nach der Realität der Wurzeln erledigt sich leicht. Es fallen nämlich diejenigen und nur diejenigen Werthe von j auf die reelle Axe der j-Ebene, deren zugehörige w-Werthe auf der Begrenzung bez. der Mittellinie des reducirten Dreiecks liegen. Diese entsprechen bekanntermaßen den Kreis-Formen. Wir haben also unter den Wurzeln der Classengleichung soviel reelle Werthe, als es Kreisclassen der Discriminante - ∇ giebt.

Gehen wir nun zu der zweiten Art der Betrachtung über. Wir

haben wir in dieser Hinsicht das einfache Resultat zu beweisen:

Unsere Classengleichung ist im Rationalitätsbereiche $V - \nabla$ eine Abel'sche Gleichung.

Bekanntlich heisst eine Gleichung dann eine Abel'sche Gleichung, wenn jede Wurzel rational durch jede andere ausgedrückt werden kann und wenn die rationalen Operationen, durch welche man von einer Wurzel zu einer beliebigen anderen übergeht, gegen einander vertauschbar sind.

In unserem Falle wird sich sogar noch etwas Weiteres ergeben.

Die Form der rationalen Function, welche aus f_α eine andere Wurzel $f_{\alpha+\beta}$ entstehen läßt, hängt lediglich von dem Werthe β ab und ist für alle Werthe von α dieselbe.

Wir können dieses so ausdrücken, daß wir schreiben:

$$f_{\alpha+\beta} = R_\beta(f_\alpha).$$

Dieser Umstand läßt einen interessanten Schluß auf die Gruppe unserer Gleichung zu. Dieselbe ist natürlich erstens eine Abel'sche Gruppe, d. h. eine Gruppe vertauschbarer Operationen. Zweitens aber erkennen wir, daß sie mit der Gruppe der Composition genau parallel läuft (ihr „isomorph" ist).

Der Uebergang von f_α zu $f_{\alpha+\beta}$ wird nämlich in der Gitterspur die dadurch bewerkstelligt, daß wir das Gitter G_α mit dem Gitter G_β multiplicieren, wobei sich das Gitter $G_{\alpha+\beta}$ ergiebt. Die Multiplication mit G_β hat also auf die Wurzeln f_α der Classengleichung denselben Einfluß wie die rationale Operation R_β. In beiden Fällen besteht die charakteristische Eigenschaft, daß sich die Indices α und β einfach additiv aneinander reihen. Wir kommen also zu dem merkwürdigen Ergebnis:

Die ursprüngliche zahlentheoretisch definirte Gruppe der Composition gewinnt bei der Classeneintheilung eine algebraische Bedeutung.

Um die vorstehenden Behauptungen zu beweisen, haben wir nur die Richtigkeit der Gleichung

$$J_{\alpha+\beta} = R_\beta(J_\alpha)$$

darzuthun. Es ist nämlich gezeigt, daß jede Wurzel in solcher Weise durch eine rationale Operation aus jeder anderen erhalten werden kann, so ergiebt sich die Vertauschbarkeit dieser rationalen Operationen von selbst. In der That wird dann

$$R_\gamma(R_\beta(J_\alpha)) = J_{(\alpha+\beta)+\gamma} = J_{(\alpha+\gamma)+\beta} = R_\beta(R_\gamma(J_\alpha)).$$

Wir stützen uns beim Beweise in erster Linie wieder auf die Transformationsgleichung. Während wir aber bisher solche Transformationsgrade n herangezogen, welche sich in Hauptgitter zerlegen

liessen, benutzen wir jetzt Transformationsgrade, welche in das Produkt zweier im Nebengitter G_β bez. $G_{-\beta}$ befindlicher Zahlen V und $\bar{V}$ zerfallen. Hinsichtlich der Wurzeln unserer Transformationsgleichung ergiebt sich daraus folgende Abänderung der Fragestellung. Wir haben früher nach denjenigen Werten j' gefragt, welche mit j_α identisch sind, entsprechend der Annahme, dass n in zwei Hauptzahlen zerlegt werden kann und mit Rücksicht darauf, dass bei der Multiplikation mit einer Hauptzahl das zu dem Werte von j_α gehörige Gitter ungeändert bleibt. Wir werden jetzt nach denjenigen Werten j' fragen, welche nicht direct gleich j_α, sondern gleich $j_{\alpha \pm \beta}$ sind; da nämlich die Zahlen V und $\bar{V}$ den Nebengittern G_β und $G_{-\beta}$ angehören sollen, wird sich das Gitter G_α bei der complexen Multiplikation mit V und $\bar{V}$ je

in ein Gitter verwandeln, welches in das Gitter $G_{\alpha+\beta}$ bez. $G_{\alpha-\beta}$ eingelagert ist, so daß J_α in $J_{\alpha\pm\beta}$ übergeht.

Uebrigens werden wir beim Beweise nur Primzahlgrade der Transformation benutzen. Wir sind dadurch einer Reihe von Fallunterscheidungen überhoben, welche bei zusammengesetzten Transformationsgraden die Betrachtung erschweren. Indessen hat diese Beschränkung auch einen Nachteil. Wir werden nämlich mit unserem Beweise nur dann durchkommen, wenn wir den Satz benutzen, daß in jedem unserer h Gitter (n) Zahlen π vorkommen. Der Beweis dieses Satzes erfordert höhere Betrachtungen und ist von Weber geliefert worden. Wir müssen hier den Satz als bewiesen übernehmen.*)

*) Dieser ist aber wie wir wiederholen nur ein Mittel zur Abkürzung der Darstellung. Wir können auch ohne den Weber'schen Satz durchkommen, indem wir solche zusammengesetzte Transformationsgrade n betrachten, die nicht ein Gitter G_β, $G_{-\beta}$ zerlegen.

Der Transformationsgrad p soll in unserer Normalfigur die Zerlegung

$$p = \pi \cdot \bar{\pi}$$

gestatten: Die Zahl π gehöre dem von dem Hauptgitter verschiedenen Gitter G_β an, so daß $\beta \neq 0$ ist. Wir können die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1.) $\pi = \bar{\pi}$ und $G_\beta = G_{-\beta}$

2.) $\pi \neq \bar{\pi}$ " $G_\beta = G_{-\beta}$

3.) $\pi \neq \bar{\pi}$ " $G_\beta \neq G_{-\beta}$.

In den beiden ersten Fällen ist G_β ein Invariantengitter u. zw. befindet sich im Falle 1.) der Punkt $(\pi, \bar{\pi})$ auf einer Symmetrielinie des Invariantengitters, im Falle 2.) in einer beliebigen Ecke desselben. Im dritten Falle ist $G_{-\beta}$ kein Invariantengitter.

Betrachten wir nun die zur Zahl p gehörige Transformationsgleichung

$$F_p(J', J) = 0.$$

Unter den $p+1$ Wurzeln J' befinden sich die Werthe $J' = J \pm \beta$ und

$j' = j_{\alpha-\beta}$. Es sind dieses nach pg. 230 zugleich die einzigen Werte von j', welche mit einer Wurzel j der Classengleichung $\chi_\nabla = 0$ übereinstimmen können. Hieraus ergeben sich für die 3 unterschiedenen Fälle nachstehende Folgerungen:

1.) Im Falle 1.) ist eine Wurzel der Transformationsgleichung bekannt, nämlich

$$j' = j_{\alpha+\beta} = j_{\alpha-\beta}.$$

Dieselbe kann in rationeller Weise als gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen

$$F_p(j', j_\alpha) = 0, \quad \chi_\nabla(j') = 0$$

nach der Methode des größten gemeinsamen Teilers berechnet werden. Wir erhalten

$$j' = j_{\alpha \pm \beta} = R(j_\alpha).$$

Die Gestalt der rationalen Function R hängt natürlich in keiner Weise davon ab, welchen der Werte $j - j_\alpha$

wir in die Transformationsgleichung eingesetzt. Der Index α kommt nur in dem Argumente von R zum Ausdrucke. Die Coefficienten von F und also die von R bestimmen sich (außer durch den Wert der Discriminante $-\nabla$) nur durch die Zahl π, oder wie wir sagen können, durch den Index β desjenigen Gitters, in welchem π liegt. Benutzt man verschiedene π desselben Index β, so wird man alle Mal auf dasselbe $j_{\alpha \pm \beta}$ geführt, so daß die entstehenden rationalen Functionen $R(j_\alpha)$ numerisch übereinstimmen.

Wir mögen daher die vorstehende Formel ausführlicher folgendermaßen schreiben:

$$\| j_{\alpha \pm \beta} = R_\beta(j_\alpha).$$

2.) Im Falle 2.) giebt es <u>zwei verschiedene</u> Transformationen p^{ter} Ordnung, welche auf <u>densel-</u>

den Wert

$$f' = f_{\alpha \pm \beta}$$

führen. In Folge dessen hat die Gleichung $F(f', f_\alpha) = 0$ jetzt eine Doppelwurzel. Diese kann direct aus der Gleichung $F = 0$ oder (falls es außer dieser noch andere Doppelwurzeln geben sollte) mit Hinzuziehung der Gleichung $R_\nu(f') = 0$, in rationaler Form als Function von f_α berechnet werden.

Der Wert dieser Function hängt nun von dem Index β ab. Wir haben also auch in diesem Falle

$$f_{\alpha \pm \beta} = R_\beta(f_\alpha).$$

In den beiden betrachteten Fällen 1.) und 2.) haben wir keinen Grund gehabt, den natürlichen Rationalitätsbereich zu erweitern. Die Coefficienten von R ergeben sich als gewöhnliche ganze Zahlen.

3.) Wir kommen nun zu dem

allgemeinen Falle 3.) Hier existiren zwei verschiedene Wurzeln

$$j' = j_{\alpha+\beta} \text{ und } j'' = j_{\alpha-\beta},$$

welche den beiden Gleichungen

$$F(j' j_\alpha) = 0 \text{ und } \chi_\nu(j') = 0$$

gemeinsam sind. Das Enklidische Verfahren liefert hier zur Bestimmung von $j_{\alpha+\beta}$ und $j_{\alpha-\beta}$ eine quadratische Gleichung. Hier sind also nicht $j_{\alpha+\beta}$ und $j_{\alpha-\beta}$ selbst, sondern nur die symmetrischen Functionen dieser Größen rational bekannt. Wir haben etwa:

$$j_{\alpha+\beta} + j_{\alpha-\beta} = R'_\beta(j_\alpha)$$

$$j_{\alpha+\beta} \cdot j_{\alpha-\beta} = R''_\beta(j_\alpha).$$

Die Coefficienten der Functionen R' und R'' hängen nur von β ab und sind gewöhnliche ganze Zahlen. Die vorstehenden Gleichungen mögen wir etwas um-

bestimmter folgendermaßen schreiben:

$$J_{\alpha+\beta} = R_\beta (J_\alpha , J_{\alpha-\beta}).$$

Wie man sieht, führt die Transformationsgleichung in diesem allgemeinen Falle nicht völlig zum Ziele. Wir müssen daher zu neuen Hilfsmitteln unsere Zuflucht nehmen. Diese liefert uns die Multiplikatorgleichung:

$$\Phi(M, J) = 0, \quad \text{wo } M = p\sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}}.$$

Zunächst ändern wir dieselbe ein wenig ab. Wie pg. 66 erwähnt, sind ihre Coefficienten nicht immer im natürlichen Rationalitätsbereiche enthalten. Stellen wir aber eine entsprechende Gleichung für

$$M^{12} = p^{12}\frac{\Delta'}{\Delta}$$

auf, so erhalten wir eine Gleichung

$$\Psi(M^{12}, J) = 0,$$

deren Coefficienten unter allen Umständen rationale ganze Zahlen sind.

Andererseits läßt sich M^{12} rational und ganzzahlig durch die entsprechenden Werte von j und j' ausdrücken (wenigstens, solange j'' nicht Doppelwurzel der Gleichung $F(j', j) = 0$ ist, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll.)

In dem uns interessirenden Falle 3.) können wir also jedenfalls setzen:

$$M^{12}_{\alpha+\beta} = Rat(j_{\alpha+\beta}, j'_{\alpha}, j_{\alpha})$$
$$M^{12}_{\alpha-\beta} = Rat(j_{\alpha-\beta}, j_{\alpha});$$

denn die Wurzeln $j_{\alpha+\beta}$, $j_{\alpha-\beta}$ sind im vorliegenden Falle nach pg. 230 einfache Wurzeln der Transformationsgleichung.

Hiermit ist allerdings zunächst noch nichts gewonnen, denn die Indices $+\beta$ und $-\beta$ erscheinen hier wieder gleichberechtigt neben einander. Wir können aber nach

pg. 232 noch eine zweite Darstellung für die Größen $M_{\alpha+\beta}$ und $M_{\alpha-\beta}$ geben, nämlich

$$M^{12}_{\alpha+\beta} = \bar{\pi}^{12} \frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha}$$

$$M^{12}_{\alpha-\beta} = \pi^{12} \frac{\Delta_{\alpha-\beta}}{\Delta_\alpha}$$

Indem diese Gleichungen sich durch die Faktoren π^{12} bez. $\bar{\pi}^{12}$ unterscheiden, geben sie uns ein Mittel den Index $+\beta$ von dem Index $-\beta$ zu trennen.

24. VII. 96. Dies wird folgendermaßen bewerkstelligt werden. Wir schreiben die vorstehenden Gleichungen:

$$1.)\ \bar{\pi}^{12} \frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha} = R_1(f_{\alpha+\beta}, f_\alpha).$$

Hier vertauschen wir α mit $\alpha+\beta$, worauf die rechte Seite übergeht in $R_1(f_{\alpha+2\beta}, f_{\alpha+\beta})$. Nach einer Bemerkung von pg. 298 aber wird

nun

$$j_{\alpha+2\beta} = R_\beta(j_{\alpha+\beta}, j_\alpha),$$

so dass der Ausdruck $R(j_{\alpha+2\beta}, j_{\alpha+\beta})$ geschrieben werden kann als eine rationale Function von $j_{\alpha+\beta}$ und j_α.

Wir können also die folgende Gleichung anschreiben:

$$2.)\quad \bar{\pi}^{12}\frac{\Delta_{\alpha+2\beta}}{\Delta_{\alpha+\beta}} = R_2(j_{\alpha+\beta}, j_\alpha).$$

In derselben Weise gewinnen wir aus 2)

$$3.)\quad \bar{\pi}^{12}\frac{\Delta_{\alpha+3\beta}}{\Delta_{\alpha+2\beta}} = R_3(j_{\alpha+\beta}, j_\alpha) \text{ etc.}$$

Wir erhalten so eine Kette von Gleichungen. Nach der Compositionstheorie muss sich dieselbe schliessen. Ist nämlich k der Exponent, welcher zu dem Gitter G_β gehört (vergl. pg. 176), so haben wir

$$j_{\alpha+k\beta} = j_\alpha\,,\quad \Delta_{\alpha+k\beta} = \Delta_\alpha.$$

In Folge dessen lautet die letzte unserer Gleichungen

$$k.)\quad \bar{\pi}^{12}\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_{\alpha+(k-1)\beta}} = R_k(j_{\alpha+\beta}, j_\alpha).$$

Durch Multiplication der Gleichungen 1.) 2.) ..... k.) ergiebt sich

$$a.)\quad \bar{\pi}^{12k} = R_1 . R_2 \ldots . R_k (j_{\alpha+\beta}, j_\alpha).$$

In derselben Weise findet man

$$b.)\quad \bar{\pi}^{12k} = R_1 . R_2 \ldots R_k (j_{\alpha-\beta}, j_\alpha).$$

Die beiden Gleichungen a.) und b.) halten wir nun mit der quadratischen Gleichung zusammen, welche zwischen $j_{\alpha+\beta}$ und $j_{\alpha-\beta}$ besteht.

Dieselbe hat mit a) die eine, mit b) die andere Wurzel gemein. Bestimmen wir also den größten gemeinsamen Teiler zwischen dieser Gleichung und a) bez. b), so erhalten wir $j_{\alpha+\beta}$ bez. $j_{\alpha-\beta}$ als rationale Function von j_α. Die Coefficienten dieser Function sind

von dem Index α unabhängig, da dieser sowohl für die quadratische Gleichung als für die Funktionen $R_1, R_2 \ldots$, R_k gilt. Wir können also wiederum schreiben.

$$j_{\alpha+\beta} = R_\beta(j_\alpha) \text{ bez. } j_{\alpha-\beta} = R_{-\beta}(j_\alpha).$$

Die Coefficienten sind aber nicht mehr, wie früher ganze Zahlen. Vielmehr gehen in dieselben die Irrationalitäten $\bar{\pi}^{12k}$, bez. $\bar{\pi}^{12k}$ ein. Da k der zum Gitter G_β gehörige Exponent ist, so werden $\bar{\pi}^k$ und $\bar{\pi}^k$ Hauptzahlen. Dasselbe gilt von den Coefficienten von R_β und $R_{-\beta}$. Diese sind ganze Zahlen nicht im natürlichen sondern in dem durch $\sqrt{-\nabla}$ erweiterten Rationalitätsbereiche.

Hiermit ist der pg. 288 begonnene Beweis für alle Fälle erbracht.

Wir haben gesehen, daß die Formel

$$j_{\alpha+\beta} = R_\beta(j_\alpha)$$

allemal statt hat, wenn es eine Primzahl p giebt, welche in dem

Gitter G_β zerlegbar ist. Nehmen wir schliesslich noch den pg. 292 erwähnten Satz von Weber hinzu, so sind wir sicher, dass zu jedem Index β eine Primzahl p gefunden werden kann, welche sich in dem Gitter G_β zerlegt. Die gefundene Darstellung von $f_{\alpha+\beta}$ lässt sich hiernach für alle möglichen Werte von β realisiren.

Mithin gilt in der That der Satz:

Die Classengleichung ist eine Abel'sche Gleichung in dem durch $\sqrt{-\nabla}$ erweiterten Rationalitätsbereiche;

(sie ist, wie man sagen kann, eine Relativ-Abel'sche Gleichung, im Gegensatz zu einer absolut-Abel'schen Gleichung, bei welcher die Coefficienten der rationalen Function R, dem natürlichen Rationalitätsbereiche angehören würden). Und ferner:

Ihre Gruppe ist mit der Gruppe der Gittercomposition direct iso-

morph.

Eine unmittelbare Folge unseres Satzes ist diese:

Die Classengleichung ist, (wie jede Abel'sche Gleichung) durch Wurzelzeichen lösbar.

Der letztgenannte Satz ist bereits von Abel selbst ausgesprochen.

Wir müssen daraus schliessen, dass er auch die vorhergehenden Entwickelungen, wenn auch in anderer Form, gekannt hat, oder doch deren Möglichkeit im rascheren Vorausblick eingesehen hat. Mit den angegebenen wichtigen Resultaten ist aber die Theorie der singulären elliptischen Gebilde nicht abgeschlossen. Es ist das Verdienst von Kronecker, der als erster den Abel'schen Satz bewiesen hat, die Theorie noch weiter geführt zu haben.

Kronecker zeigt vor allen Dingen, dass die Classengleichung eine irreductible Gleichung ist, dass

sie also einen in sich abgeschlossenen, nicht weiter zerlegbaren Rationalitätsbereich, den sog. Classenkörper definirt.

Der Beweis dieser Thatsache setzt weitgehende Hilfsmittel voraus, nämlich die allgemeine Idealtheorie der algebraischen Zahlen, welche gleichfalls von Kronecker u. zw. gerade zu dem genannten Zwecke entwickelt worden ist.

Wir verweisen dieserhalb auf Weber § 110.

Wir wollen an dieser Stelle von der allgemeinen Idealtheorie eine, wenn auch nur flüchtige Beschreibung im Sinne dieser Vorlesung geben.

Gegeben sei die irreducible ganzzahlige Gleichung $f_n(x) = 0$ mit den Wurzeln $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; jede dieser Wurzeln definirt einen Körper, bestehend aus denjenigen ganzrationalen Functionen dieser Größen, welche

ganze algebraische Zahlen sind.

Wir verstehen jetzt unter $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ einen Complex so erhaltener zusammengehöriger ganzer Zahlen.

Zur geometrischen Interpretation kommen wir, wenn wir den Complex der Zahlen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ durch einen Punkt des n-dimensionalen Raumes repräsentiren. Suchen wir alle Punkte des Raumes auf, welche zu Coordinaten bez. Zahlen des Körpers ξ, der Körpers η, etc. besitzen, so bilden diese ein Gitter im n-dimensionalen Raume. Es ergiebt sich dieses daraus, daß die so entstehende Gesammtheit von Punkten die Eigenschaft haben muß, sich bei Addition der Coordinaten zu reproduciren. In unserem Bilde berücksichtigen wir hiernach immer gleichzeitig n Zahlen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, während man in der Körpertheorie nur je von einer dieser Größen redet. Wir haben zunächst zu defi-

niren, was es heissen soll, zwei Punkte dieser Gitter zu multipli„ziren. Unsere Definition soll durch die Formel festgelegt sein.

$$(\xi, \eta, \zeta, \ldots)(\xi', \eta', \zeta', \ldots) = (\xi\xi', \eta\eta', \zeta\zeta', \ldots).$$

Sodann haben wir von der Operation der Division zu sprechen und überhaupt von den Teilbarkeitsbe„ziehungen. In Bezug hierauf gilt nun ganz dasselbe, was bei den ebenen Gittern ausgeführt wurde. Um das Theorem aufrecht zu halten, <u>dass jeder Punkt sich (von Einheiten abgesehen) auf eindeutige Weise in Primpunkte zerlegen läßt</u>, muss man neben das Hauptgitter eine endliche Anzahl von Nebengittern stellen und deren Punkte als sog. „ideale Punkte" neben den Punkten der Hauptgit„

ters, den „wirklichen Punkten“ in die Betrachtung einbeziehen. Ich kann diesbezüglich auf die Furtwängler'sche Dissertation *) verweisen, wo der Fall $n = 3$ durchgeführt wird.

Auf Grund dieser allgemeinen Ideal-theorie ist es nun Kronecker gelungen, die Irreduzibilität der Klassengleichung und damit die Existenz des Klassenkörpers darzuthun. Von den Zahlen dieser Körper kennen wir bisher die Invarianten j und die Multiplikatoren M^{12}. Weiterhin wird man namentlich nach den Einheiten der Körper, den Primzahlen etc. fragen.

Diese Dinge werden behandelt von Weber, Ellipt. Fu. § 110. und 111.

Wir müssen uns hier auf die folgende Bemerkung beschränken.

*) Furtwängler, Zur Theorie der in Linear-factoren zerlegbaren, ganzzahligen homogenen cubischen Formen. Göttingen 1896.

Sei der Einfachheit wegen $p \equiv 1 \pmod{12}$; dann ist nicht nur M^{12}, sondern M selbst durch $f_{\alpha+\beta}$ und f_α rational ausdrückbar, d. h. eine Zahl der Klassenkörper. Für M hatten wir die Formel

$$M = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha}},$$

die in derselben Weise mit dem Index $-\beta$ gebildete Zahl ist

$$M = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha-\beta}}{\Delta_\alpha}}$$

Solcher Zahlen M erhalten wir eine ganze Reihe, dadurch, daß wir den Index $\underline{\alpha}$ alle möglichen Werte durchlaufen lassen.

Wir wollen die beiden vorstehenden Zahlen mit einander multipli. zieren, nachdem wir in der zweiten α durch $\alpha+\beta$ ersetzt haben. Dann ergiebt sich

$$\pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha}} \quad \bar{\pi} \sqrt[12]{\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_{\alpha+\beta}}} = \pi \cdot \bar{\pi} = p.$$

Um den Sinn dieser Gleichung gehörig zu würdigen, müssen wir uns auf den Standpunkt derjenigen Arithmetiker stellen, welche nur die Zahlen der Hauptgitter als „wirkliche" Zahlen gelten lassen. Dann werden wir sagen können: Die Primzahl p, welche sich im quadratischen Körper nur in die idealen Faktoren π und $\bar{\pi}$ spalten läßt, wird hier, im Classenkörper, in die wirklichen Faktoren

$$= \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha}} \text{ bez. } \bar{\pi} \sqrt[12]{\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_{\alpha+\beta}}}$$

zerlegt. Der Classenkörper leistet also hinsichtlich der Spaltung der Primzahl p dasselbe, wie die Hinzunahme der Nebengitter zu dem Hauptgitter der Ebene.

Man kann sich die Frage vorlegen, welche von diesen beiden

Methoden zur „Realisirung der idealen Zahlen" vor der anderen den Vorzug verdient. Ohne Zweifel ist die Hinzunahme der Nebengitter viel elementarer als der Uebergang zu dem Classenkörper. Dafür bietet aber der letztere in algebraischer Hinsicht gewisse Vorteile dar. Er ist nämlich relativ zu dem quadratischen Körper, wie wir sahen, direct ein Abel'scher Körper. Etwas anders stellt sich das algebraische Verhältnis der Nebengitter zu dem Hauptgitter.

Die Nebengitter haben wir so construirt, daß wir aus gewissen Zahlen der Hauptgitters die k^{te}, k_1^{te}, k_2^{te} ..... Wurzel zogen. Die Nebenzahlen sind also mit den Hauptzahlen durch die Gleichung verknüpft

$$\chi^k = H,$$

wo H eine ganze Zahl des Körpers $\sqrt{-\nabla}$ bedeutet. Diese Gleichung

ist nicht direct eine Abel'sche Gleichung. Die Wurzeln derselben $x_1, x_2, \ldots\ldots x_k$ sind allerdings rational durch einander auszudrücken, aber nur nach Adjunction der k^{ten} Einheitswurzeln. Wir können hiernach sagen: Die sämmtlichen Ecken unserer Normalfigur gehören gleichfalls einem Körper an, welcher relativ Abel'sch ist. Bei der Aufstellung dieses Körpers wird aber nicht nur $\sqrt{-\nabla}$, sondern auch $e^{\frac{2\pi i}{k}}, e^{\frac{2\pi i}{k_1}}, e^{\frac{2\pi i}{k_2}}, \ldots\ldots$ oder, wie wir zusammenfassend sagen können, $\sqrt{-\nabla}$ und $e^{\frac{2\pi i}{k}}$ unter die rational bekannten Größen gerechnet. Geometrisch kommt das Hereinspielen der k^{ten} Einheitswurzeln darin zum Ausdruck, daß wir unsere Normalfigur auf k Weisen zeichnen konnten. Die Normalfigur ist k-deutig bestimmt. Umgekehrt ist der Classenkörper eindeutig definirt.

Wir bemerken noch, daß die Prim. zahl p nach unserer obigen Formel

$$p = \bar{\pi} \sqrt[n]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha}} \cdot \bar{\pi} \sqrt[n]{\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_{\alpha+\beta}}}$$

scheinbar sehr verschiedene Zerlegungen in unserem Classenkörper gestattet, da wir den Index α hier beliebig variiren können. Diese Behauptung scheint dem Gesetze der eindeutigen Factorenzerlegung zu widersprechen. Sie findet aber dadurch ihre Erklärung, daß sich die einzelnen Factoren nur durch Einheiten unterscheiden. Es gilt nämlich der Satz:

Alle Ausdrücke

$$\sqrt[n]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha} \cdot \frac{\Delta_{\alpha'}}{\Delta_{\alpha'+\beta}}}$$

sind Einheiten des Classenkörpers.

Unter ihnen sind als reell diejenigen ausgezeichnet, für welche $\alpha = -\beta$

sind $d' = 0$ ist; die reellen Einhei-
ten sind also durch den Aus-
druck gegeben

$$\sqrt[12]{\frac{\Delta_g^{\,2}}{\Delta_d\,\Delta_{-d}}}$$

Leider ist es unmöglich, daß wir
hier diese interessanten Fragen wei-
ter verfolgen. Man gebraucht zu
ihrer Behandlung zweckmäßigerwei-
se die Kronecker'sche Grenzfor-
mel, die wir gerade mit Rück-
sicht hierauf mitgeteilt hat-
ten.

Den Rest der Vorlesung werden wir
uns damit beschäftigen, analoge Un-
tersuchungen für die Moduln höherer
Stufe aufzustellen. Ansätze hierzu
liegen bereits in der Literatur vor:
So behandelt Weber den Modul 3ter
Stufe $\sqrt[3]{J}$ und den Modul 46ter
Stufe $f \cdot \sqrt{k^2 k'^2}$ welche bez. der
1ten oder 2ten Stufe adjungirt sind.
Unsere Aufgabe soll es insbesondere
sein, den Modul 5ter Stufe J

zu besprechen. Wir werden die Betrachtung allerdings nicht vollkommen durchführen können, sondern müssen uns begnügen, einen genauen Plan für dieselbe zu entwerfen. Die erforderlichen Schritte wollen wir der Reihe nach aufzählen.

1. Vor Allem werden wir uns zunächst damit beschäftigen, die Transformation n^{ter} Ordnung von $\varphi(w)$ zu studiren. Dabei setzen wir, um Complicationen zu vermeiden, ein für allemal voraus, daß n nicht durch 5 teilbar sei.

Ähnlich wie zwischen der Invariante j und dem transformirten j' eine algebraische Gleichung $F(j', j) = 0$ vom Grade $\psi(n)$ besteht, so bestehen auch zwischen φ und dem transformirten Werte φ' Transformationsgleichungen vom Grade $\psi(n)$ (vergl. pg. 81). Der Unterschied ist nun der, daß wir hier immer 60 solcher Transformationsgleichungen nebeneinander zu betrachten haben. Diese 60 Gl. um-

terscheiden wir in eine Hauptglei-
chung und 59 Nebengleichungen.
Wir vervollständigen die früheren
Angaben hierüber folgendermaßen:
a. Die Hauptgleichung $f(\zeta', \zeta) = 0$
liefert alle diejenigen transformir-
ten $\zeta' = \zeta\left(\frac{a\omega+b}{c\omega+d}\right)$, $ad - bc = n$, für
welche die Transformationscoefficien-
ten a, b, c, d den Congruenzbe-
dingungen:

$$\left.\begin{aligned} a &\equiv \pm 1 \qquad b \equiv 0 \\ c &\equiv 0 \qquad d \equiv \pm n \end{aligned}\right\} \pmod 5$$

genügen. Die Coefficienten der Haupt-
gleichung sind rationale Zahlen des
natürlichen Rationalitätsbereichs.
b. Die Nebengleichungen entstehen aus
der Hauptgleichung dadurch, daß wir
auf ζ oder auf ζ' beliebige Z.Ko.
saedersubstitutionen ausüben. Zu-
nächst scheint es so, als ob auf die-
se Weise im Ganzen 60×60 Gleichun-
gen entständen. Dies ist aber nicht der
Fall, weil immer 60 von den sämmt-
lichen Gleichungen untereinander

identisch werden. Wir erwähnten in dieser Hinsicht bereits pg. 87, daß die Gleichung $f(\zeta', \zeta) = 0$ in sich übergeht, wenn wir auf φ' eine beliebige Ikosaedersubstitution und auf φ eine in dem Sinne zugeordnete Substitution ausüben, daß wir $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}^n$ verwandeln. So kommt es, daß von den 60×60 Gleichungen immer 60 identisch werden. Die übrig bleibenden 60 Gleichungen können wir in der Form ausschreiben:

$$f(S(\zeta'), \zeta) = 0,$$

unter S eine beliebige Ikosaedersubstitution verstanden. Bedeutet S die Identität, so haben wir die Hauptgleichung; bedeutet S eine beliebige andere Ikosaedersubstitution, so ergiebt sich je eine der Nebengleichungen.

2. Es ist klar, daß die Coefficienten der (nach ζ und ζ' geordneten) Nebengleichungen im Allgemeinen nicht dem natürlichen Rationalitätsbe-

reich angehören können. Da nämlich durch die Substitution S die 5te Einheitswurzel ε eingeführt wird, so werden die Coefficienten im Allgemeinen dem durch ε erweiterten Rationalitätsbereich angehören. Es ist aber auch möglich, daß von den Nebengleichungen einige im natürlichen, einige in dem Rationalitätsbereiche $\varepsilon + \varepsilon^4$ (welcher mit dem Rationalitätsbereiche $\sqrt{5}$ identisch ist) rational sind. Die Entscheidung hierüber muß der Specialuntersuchung vorbehalten bleiben.

2. Wir wollen die Nebengleichungen noch in ähnlicher Weise durch Bedingungen für die Transformationscoefficienten a, b, c, d charakterisiren, wie dieses für die Hauptgleichung bereits oben geschehen ist. Zu dem Zwecke wollen wir die sämmtlichen Transformationen:

$$w' = \frac{a w + b}{c w + d}, \quad a d - b c = n$$

in gewisser Weise in Classen zu-
sammenfassen. Wir verstehen unter
a_0, b_0, c_0, d_0 eine Lösung der Congruenz,

$$a_0 d_0 - b_0 c_0 \equiv n \pmod 5.$$

Diese Congruenz besitzt 60 verschie-
dene mod 5 incongruente Lösungen
(sofern wir von einem gleichzeitigen
Vorzeichenwechsel der 4 Größen $a_0, b_0,$
c_0, d_0 absehen). Wir fassen nun alle
diejenigen Transformationen ($a, b,$
c, d) zusammen, welche denselben
Wertsystem (a_0, b_0, c_0, d_0) mod 5
congruent sind, so dass

$$\left.\begin{aligned} a &\equiv \pm a_0 \qquad b \equiv \pm b_0 \\ c &\equiv \pm c_0 \qquad d \equiv \pm d_0 \end{aligned}\right\} \pmod 5.$$

Es zeigt sich, dass alle in diesem
Sinne zusammengehörigen Transfor-
mationen aus ζ alle diejenigen
Werte ζ' entstehen lassen, welche
mit ζ durch eine unserer 60 Trans-
formationsgleichungen zusammen-
hängen. Die letzteren werden wir
daher passend durch Beifügung

der Schemas $\left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right|$ unterscheiden, und allgemein in der Form schreiben:

$$f\left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right|(\eta', \eta) = 0$$

Die Hauptgleichung wird in dieser Bezeichnung durch das Schema $\left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{matrix}\right|$ charakterisirt.

Uebrigens betonen wir nochmals, dass wir immer nur „eigentliche" Transformationen im Auge haben, also ausschliessen, dass die a, b, c, d einen Factor gemein haben.

3. Es gilt nun vor allen Dingen, die Gesammtheit dieser 60 Transformationsgleichungen dadurch übersichtlicher zu machen, dass wir sie in <u>Kategorieen gleichberechtigter Gleichungen</u> zusammenfassen. Wir erwähnten bereits, dass wir zwei Transformationsgleichungen gleichberechtigt nennen, wenn sie aus einander hervorgehen, indem man auf η' und η dieselbe Ikosaedersubstitution (resp. cogrediente Ikosaedersubstitutionen) ausübt.

Die folgenden Entwickelungen werden zeigen, daß 2 gleichberechtigte Gleichungen auch immer gleichwertig sind, so daß es genügt, aus jeder Kategorie immer nur eine Gleichung zu betrachten. Man wird, allgemein zu reden, diejenige wählen, welche die einfachsten Zahlenkoeffizienten darbietet.

4. Jede unserer 60 Transformationsgleichungen geht, wie wir sagten, bei 60 simultanen Substitutionen von ζ und ζ' in sich über. Die Substitutionen sind aber im Allgemeinen durchaus nicht „congruent" oder „cogredient", d. h. für ζ und ζ' gleichlautend. Indessen kann ein Teil der 60 Substitutionen cogredient sein. Wir wollen die Anzahl dieser cogredienten Substitutionen mit Hermite als das „Gewicht" der Gleichung bezeichnen. Jeder Transformationsgleichung kommt auf diese Weise eine gewisse Gewichtszahl g zu.

Diese Gewichtszahl g steht in

engster Beziehung zu der eben postulirten Einteilung unserer Gleichungen in Kategorieen gleichberechtigter Gleichungen. Ersichtlich ist nämlich die Anzahl der Gleichungen, welche mit einer gegebenen Gleichung gleichberechtigt sind, $\frac{60}{g}$.

5. Zur Bestimmung des Gewichtes dient die folgende Congruenz:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \pm \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \pmod{5}$$

mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

In dieser Congruenz sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Unbekannten. Die Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ geben direct diejenigen Ikosaedersubstitutionen von ζ, welche mit den zugehörigen Ikosaedersubstitutionen identisch sind. Die Anzahl der mod 5 unterschiedenen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ welche der obigen Congruenz genügen, liefert direct die Gewichtszahl g.

6. Die Specialdiscussion dieser

Congruenzen ergiebt für g die folgenden Tabellen:

$$n \equiv 1 \pmod 5$$

Bezeichnung der Schemata	Anzahl der Schemata	Gewicht g
$\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	1	60
Andere Schemata mit $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	24	5
$a_0 + d_0 \equiv 0$	15	4
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	20	3

$$n \equiv 4 \pmod 5$$

Schemata	Anzahl	g
$\pm \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	1	60
Andere Schemata mit $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	24	5
$a_0 + d_0 \equiv 0$	15	4
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	20	3

$n \equiv 2 \pmod 5$

Schemata	Anzahl	g
$a_0 + d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	20	3
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	30	2

$n \equiv 3 \pmod 5$

Schemata	Anzahl	g
$a_0 + d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	20	3
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	30	2

Hier bedeutet immer die erste Co-lonne eine modulo 5 zu verstehende Congruenzbedingung für die Zahlen der Schemas; die zweite Colonne giebt an, für wie viele Schemata die

letzte Bedingung erfüllt ist, die letzte Colonne zeigt das zugehörige Gewicht an.

Wie man sieht, liefern die Transformationsgrade $n \equiv 1, 4 \pmod 5$ und die Grade $n \equiv 2, 3 \pmod 5$ je unter sich analoge Resultate.

Z. Aus den vorstehenden Tabellen können wir noch folgender schliessen:

Bei $n \equiv 2, 3 \pmod 5$ sind jedesmal diejenigen Schemata gleichberechtigt, welche dieselbe Summe $\pm (a_0 + d_0)$ darbieten.

Denn greifen wir z. B. bei $n \equiv 2$ ein beliebiges Schema mit $(a_0 + d_0) = \pm 1$ heraus. Dasselbe hat das Gewicht 3, infolgedessen gibt es noch $\frac{60}{3} = 20$ gleichberechtigte Schemata, diese müssen natürlich sämmtlich dasselbe Gewicht wie das ursprüngliche Schema, also das Gewicht 3, haben.

Infolgedessen müssen es die 20 Schemata sein, für die $(a_0 + d_0) = \pm 1$ ist, denn diese allein

besitzen das Gewicht 3.

Das Gleiche wie bei $n \equiv 2, 3$ gilt auch bei $n \equiv 1 \pmod 5$ für $(a_0 + d_0) \equiv 0, \pm 1$, ebenso bei $n \equiv 4$ für $(a_0 + d_0) \equiv 0, \pm 2$.

Dagegen zerfallen bei $n \equiv 1$ die Schemata mit $(a_0 + d_0) \equiv \pm 2$ und bei $n \equiv 4$ die Schemata mit $(a_0 + d_0) \equiv \pm 1$ in drei getrennte Kategorieen gleichberechtigter. Es giebt jedesmal ein für sich stehendes Schema vom Gewicht 60. Aber auch die übrig bleibenden 24 Schemata vom Gewicht 5 können noch nicht in eine Kategorie gehören, denn zum Gewicht 5 gehören jedesmal nur 12 gleichberechtigte Schemata. Es müssen deshalb die genannten 24 Schemata sich noch in 2 Kategorieen von je 12 gleichberechtigten Schematen zerlegen. Diese 2 Kategorieen werden später noch näher charakterisirt werden.

8. Bevor wir dazu übergehen, die einzelne Gleichung $f \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} (\xi, \zeta)$ in ganz analoger Weise

zu behandeln wie die Gleichung $f(J, J') = 0$ müssen wir vorher noch eine Betrachtung einschieben, welche für die Constitution der eben genannten Gleichung von Wichtigkeit ist.

Die Zahl g bezeichnet nach ihrer Entstehung je eine Untergruppe der Ikosaedergruppe, nämlich die Gruppe derjenigen Ikosaedersubstitutionen, welche auf ζ und ζ' angewandt je eine Transformationsgleichung von ζ in sich überführen.

Durch eine solche Untergruppe werden die Punkte der ζ-Kugel, allgemein zu reden, zu g zusammengeordnet. Diese g-Punkte werden im Allgemeinen verschieden von einander sein; sie können nur dann ganz oder zum Teil zusammenfallen, wenn es sich um die Ecken des Ikosaeders, oder die Mitten seiner Seitenflächen, oder seine Kantenhalbierungspunkte handelt, da nur diese

als Fixpunkte der Tetraedersubstitutionen auftreten.

9. Jetzt können wir in mannigfacher Weise eine rationale Function g^{ten} Grades r_g von φ bilden, welche bei den Substitutionen unserer Untergruppe ungeändert bleibt. Dies r_g kann immer so angesetzt werden — und dies werden wir im Folgenden voraussetzen — dass es in seinen Coefficienten keine andere Irrationalität enthält als ε.

So können wir z. B. für die cyclische Untergruppe G_5, die durch die Substitution

$$\varphi' = \varepsilon\varphi$$

begründet wird, als einfachsten r_5 wählen:

$$r_5 = c\varphi^5,$$

wo c eine beliebige Constante bedeutet. Wollen wir an der angegebenen Beschränkung festhalten, so dürfen wir c nicht ganz beliebig wählen, sondern müssen es als rationale Function von ε ansetzen.

Ueber die zu den Untergruppen gleichberechtigter Gleichungen gehörigen r_g wollen wir noch eine besondere Verabredung treffen. Bekanntlich gehen in einer Categorie gleichberechtigter Gleichungen aus einer von ihnen die übrigen hervor, indem man auf die erstere gewisse Vertauschungen anwendet. Dementsprechend werden wir bei einer Kategorie gleichberechtigter Gleichungen für eine das r_g beliebig - allgemein zu reden möglichst einfach wählen. Für die übrigen Gleichungen bestimmen wir dann die r_g so, daß wir auf das gewählte r_g diejenigen Vertauschungen anwenden, durch welche die betreffenden Gleichungen aus der zuerst gewählten hervorgehen.

Die Gleichung r_g - Const. liefert uns nun, je nach dem Werthe der rechter Hand stehenden Constanten, die Gruppen

von jedesmal g zusammengehörigen Punkten der Kugel, sie hat also nur dann möglicher Weise vielfache Wurzeln, wenn es sich um die vorhin bezeichneten besonderen Punkte handelt.

Alle anderen rationalen Funktionen von ζ, welche bei unserer Untergruppe ungeändert bleiben – insbesondere die rationale Funktion 60ten Grades j – sind rationale Funktionen von r_g.

Ist $g = 60$, so nehmen wir einfach $r_{60} = j$.

10. Wir setzen jetzt in einer unserer Gleichungen $\zeta' = \zeta$ und fragen nach den Wurzeln der so entstehenden Gleichung $f\left|\begin{matrix} a_0 & c_0 \\ b_0 & d_0 \end{matrix}\right| (\gamma, \gamma)$.

Ein Teil dieser Wurzeln kann in die Ikosaederecken fallen; es sind dieses solche Werte von ζ, denen der Wert $j = \infty$, d. h. ein reeller ω entspricht. Die Multiplizität dieser Wurzeln muss-

durch Reihenentwickelungen von φ nach der Größe $r = e^{2i\pi\omega}$ entschieden werden. Da uns diese Wurzeln später stören würden, wollen wir die entsprechenden Linearfactoren aus der Gleichung $f(\varphi, \varphi) = 0$ fortgehoben denken, was (innerhalb des Bereiches ε) rational möglich ist.

Ebenso können eine Anzahl Wurzeln in die Seiten-mitten oder Kantenmitten des Ikosaeders fallen, denen solche Werte ω entsprechen, die mit i oder ϱ aequivalent sind. Diese können wir ebenfalls (innerhalb des Bereiches ε) rational abtrennen, was wir als geschehen annehmen.

Die übrigbleibende Gleichung bezeichnen wir als „gereinigte" Transformationsgleichung und schließen sie zwecks äußerer Kennzeichnung in eckige Klammern ein

$$\left[f \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} (\varphi, \varphi) \right] = 0.$$

Von ihren Wurzeln gehören jedesmal g vermöge der zugehörigen Untergruppe zusammen, und diese g Wurzeln sind unter sich alle verschieden. Hieraus schliessen wir, dass unsere Gleichung in Wirklichkeit eine solche für r_g ist, die wir so schreiben:

$$\Psi\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}(r_g) = 0$$

Die Coefficienten von Ψ sind jedenfalls nach Adjunction von δ rationalen und im übrigen zerfallen natürlich die Gleichungen Ψ genau so in Kategorieen gleichberechtigter wie die Gleichungen f.

Bei den Gleichungen Ψ erkennen wir nun sehr deutlich, dass gleichberechtigte Gleichungen auch wirklich gleichwertig sind. Nach der Verabredung, die wir über die r_g getroffen haben, unterscheiden sich nämlich die gleichberechtig-

ten Ψ nur durch ihr r_g, fallen im übrigen aber vollständig zusammen.

11. Die Wurzeln der Gleichung $\Psi = 0$ lassen sich nun in übersichtlicher Weise durch die zugehörigen Werte von w bezeichnen.

Zunächst gehören natürlich zu jedem Werte φ unendlich viele Punkte w, aber von diesen unendlich vielen brauchen wir nur die reducirten w, d. h. die innerhalb der aus 60 Elementarbereichen der w-Ebene zur Hauptcongruenzgruppe 5ter Stufe gehörigen Fundamentalpolygone liegenden zu berücksichtigen.

Da wir ferner die besonderen Werte φ, welche den Fundamentalecken etc. entsprechen, bereits entfernt haben, werden wir nur solche Punkte w zu betrachten haben, welche im Innern der Halbebene liegen und weder mit $\varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ noch mit $i = \sqrt{-1}$

im elementaren Sinne aequivalent sind.

Für die Beziehung zwischen ζ und w gilt nun der Satz:

Ein Werth ζ wird ebenso oft Wurzel der Gleichung $[f(\varphi, \psi)] = 0$ sein, als der entsprechende reducirte w bei Transformationen n^{ter} Ordnung der vorgelegten Schemar ungeändert bleibt.

und ferner:

Jedesmal g Werte ζ (oder auch w) zusammen ergeben eine Wurzel ψ von $\Psi = 0$.

12. Sei jetzt in Uebereinstimmung hiermit:

$$w = \frac{a w + b}{c w + d},$$

wo $(ad - bc) = n$ und $\left|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right| \equiv \pm \left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right| \pmod{5}$

Wir haben dann

$$c w^2 + (d - a) w - b = 0$$

oder, wie wir abkürzend schreiben:

$$P w^2 + Q w + R = 0.$$

Hier sind die ganzen Zahlen P, Q, R (die gern einen Faktor gemein haben können, den wir dann aber zweckmäßigerweise nicht wegheben) an die Kongruenzen gebunden:

$$P \equiv \pm c_0, \quad Q \equiv \pm (d_0 - a_0), \quad R \equiv \mp b_0 \pmod 5.$$

Wir setzen noch der Kürze halber

$$a + d = t,$$

worauf natürlich t der Kongruenz unterliegt:

$$t \equiv \pm (d_0 + a_0) \pmod 5.$$

Als Wert der negativ genommenen Diskriminante der für w geltenden quadratischen Gleichung ergiebt sich jetzt:

$$4PR - Q^2 = \nabla = 4n - t^2.$$

Auf solche Weise finden wir: Um alle in Betracht kommenden Werte von w zu erhalten, suche man zunächst alle positiven Werte von ∇, die in der Gestalt $4n - t^2$ enthalten sind, wo $t \equiv \pm (d_0 + a_0) \pmod 5$. Ferner bestimme man innerhalb

der Fundamentalbereiches der w - Ebene die Nullstellen aller solcher primitiver oder imprimitiver Gleichungen $Pw^2 + Qw + R = 0$, deren Discriminante $= -\nabla$ ist und die ausserdem für die P, Q, R aufgestellten Congruenzbedingungen genügen.

Von diesen Nullstellen schliesse man noch diejenigen aus, deren P, Q, R mit t einen gemeinsamen Teiler haben, — denn sie würden auf uneigentliche Transformationen n^{ter} Ordnung führen. —

Ferner schliesse man diejenigen aus, die mit ϱ oder i im elementaren Sinne aequivalent sind. Die übrigen w geben jeweils mit der richtigen Multiplicität die einzelnen Wurzeln der Gleichung $[f] = 0$ und, da sie zu ϱ zusammengehören, der Gleichung $\psi(r_\varrho) = 0$.

13. Es kommt nun darauf an, für jeden Wert von ∇ die Zahl der hiermit bezeichneten w - Werte

abzuzählen. Es möge H die Classen-
zahl der zu $(-\nabla)$ gehörigen primiti-
ven und imprimitiven Classen qua-
dratischer Formen sein. Von ihnen
kommen wegen der eben formulirten
Nebenbedingungen gewisse in Weg-
fall. die Zahl der übrig bleibenden
Klassen bezeichnen wir mit H'.
Dieser H' baut sich in einfacher
Weise aus den Anzahlen h der pri-
mitiven Classen auf, die zu solchen
Discriminanten gehören, die aus
$(-\nabla)$ durch Abtrennung gewisser
quadratischer Teiler entstehen.
Wir schreiben in diesem Sinne

$$H' = \sum h\left(\frac{\nabla}{\tau^2}\right),$$

wobei τ teilerfremd zu t zu wäh-
len ist. Ist nämlich (p, q, r) eine
Form aus den h Classen der Dis-
criminante $\left(\frac{-\nabla}{\tau^2}\right)$, so ist die ent-
sprechende Form der Discriminan-
te $(-\nabla)$ offenbar $(\tau p, \tau q, \tau r)$.
Diese Form gehört aber zu den ge-
suchten, da $\tau p, \tau q, \tau r, t$ keinen ge-

meinsamen Teiler haben.

Zu jeder der H' Klassen gehören nun innerhalb der Fundamentalbereiche der w-Ebene 60 Nullpunkte. Unter ihnen müssen wir diejenigen insbesondere aufsuchen, welche den für P, Q, R aufgestellten Kongruenzbedingungen genügen. Wir wissen bereits, daß sich die aufzusuchenden Punkte in Serien von je g zusammengruppieren.

Eine kurze Ueberlegung zeigt nun, daß sich bei $n \equiv 2, 3 \pmod 5$ innerhalb der zur einzelnen Klasse gehörigen 60 Nullpunkte immer gerade eine Serie von g Punkten befindet, welche die Kongruenzbedingungen befriedigt.

Um die Ideen zu fixieren, zeigen wir dies gleich an einem bestimmten Beispiel. Wir nehmen an $n \equiv 2 \pmod 5$ und ein Schema $\left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right|$, für das $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ ist. Solcher gibt es 20 mit dem zugehörigen Fewirt 3. Es sei nun eine bestimmte dieser

minante $\nabla = 4n - t_0^2$ vorgelegt, wo $t_0 \equiv a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ ist. Wir greifen nun eine zu $(-\nabla)$ gehörige Classe heraus und von den zugehörigen 60 reducirten w ein ganz beliebiges w_0, dem die Form

$$(P_0, Q_0, R_0)$$

entsprechen möge. Aus t_0, P_0, Q_0, R_0 läßt sich nun offenbar ein entsprechendes Schema $\left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right|$ berechnen, das natürlich einer zu der ausgewählten Categorie gehörigen Gleichung zugehört, da eben $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ ist.
w_0 liefert daher für eine bestimmte unter den 20 gleichberechtigten Gleichungen eine Wurzel, nämlich für die, welche durch das berechnete Schema charakterisirt ist. Für dieselbe Gleichung liefern natürlich noch 2 andere von den 60 Werten w, etwa w_1 und w_2 Wurzeln. Wenden wir nun auf w_0, w_1, w_2 diejenigen Substitutionen an, welche den Producten der Substitutionen entsprechen, vermittelst deren man aus einer

letztgenannten Gleichung die 19 gleichberechtigten erhält, so sehen wir, dass für jede dieser 20 Gleichungen sicher 3 von unseren Werten w Wurzeln liefern.

Da nun im ganzen 20 gleichberechtigte Gleichungen vorhanden sind, so sind damit auch alle 60 Werthe w erschöpft, d. h. von den 60 Nullpunkten gehören zu jeder von den 60 gleichberechtigten Gleichungen stets 3 eine und auch nur eine Serie von 3 Punkten.

Das giebt also für unsere Gleichung

$$3 \sum \mathfrak{H}'(4n - t^2)$$

Nullpunkte (wobei t natürlich nur Werthe $\equiv \pm (a_0 + d_0) \pmod 5$ zu durchlaufen hat.

Dieselbe Formel gilt bei $n \equiv 1 \pmod 5$ für $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 1$, und bei $n \equiv 4 \pmod 5$ für $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 2$. Dagegen ist für $n \equiv 1$ und $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ und ebenso für $n \equiv 4$ und $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ eine Fallunterscheidung

einzuführen.

14. In den zuletzt angegebenen Fällen giebt es im ganzen je 25 zugehörige Gleichungen, die in 3 Categorien gleichberechtigter zerfallen.

Wir bezeichnen dies kurz so:

$n \equiv 1 \pmod 5$ $\qquad$ $n \equiv 4 \pmod 5$

	Schemata	Anzahl	g
I	$\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\left\|\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right\|$	1	60
II	$a_0+d_0 \equiv \pm 2$	12	5
III	$a_1+d_0 \equiv \pm 2$	12	5

	Schemata	Anzahl	g
I	$\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\left\|\begin{matrix}2&0\\0&2\end{matrix}\right\|$	1	60
II	$a_0+d_0 \equiv \pm 1$	12	5
III	$a_1+d_0 \equiv \pm 1$	12	5

Hier ist die Kategorie I schon von den übrigen getrennt, da sie nur ein ganz bestimmtes Schema enthält. Die Kategorien II und III können wir dagegen vorläufig noch nicht sondern.

Ehe wir nähere Erläuterungen hierzu geben, bemerken wir noch vorweg, daß in den betrachteten Fällen die

Discriminante $\nabla = 4n - t^2$ stets durch 5 teilbar ist, wie man leicht nachrechnet.

Sei nun ein beliebiges hergehöriges ∇ gegeben und greifen wir eine beliebige zu $(-\nabla)$ gehörige Klasse heraus, welche die Eigenschaft hat, daß P, Q, R, t keinen gemeinsamen Teiler haben. Diesen entsprechen dann 60 Nullpunkte w. Hier ist sofort klar, daß die 60 Werte w nur Wurzeln für <u>eine</u> der 3 Kategorieen gleichberechtigter Gleichungen liefern können, weil eben für jede Kategorie jedesmal 60 Nullpunkte aufgebraucht werden.

Nach der Lehre von den Gattungen, auf die wir hier nicht näher eingehen können, zerfallen nun da ∇ durch 5 teilbar ist, die Klassen in 3 Kategorieen.

<u>I.</u> solche, die nur Vielfache von 5 darstellen,

<u>II.</u> solche, die ausser Vielfachen von 5 nur quadr. Reste mod. 5 darstellen,

III. solche, die ausser Vielfachen von 5 nur quadr. Nichtreste mod. 5 darstellen.

Diese Einteilung entspricht nun genau der Einteilung unserer Theorema in die 3 Kategorieen gleichberechtigter.

Haben wir nämlich für $n \equiv 1$ das Schema $\pm \left|\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right|$ oder für $n \equiv 4$ das Schema $\pm \left|\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right|$, so erweisen sich vermöge unserer Congruenzen P, Q, R durch 5 teilbar.

Es gehört hierher also die erste Kategorie von Klassen, die nur Vielfache von 5 darstellt.

Die Kategorieen II und III trennen sich, wie wir nun nachweisen wollen, dadurch, dass für die eine, sagen wir für die Kategorie II nur solche quadratische Formen Wurzeln liefern, die ausser Vielfachen von 5 nur quadratische Reste mod. 5 darstellen, so dass für diese Kategorie entweder das Symbol $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sind.

Für die Gleichungen der Kategorie

III liefern entsprechend nun solche quadr. Formen Wurzeln, die unser Vielfachen von 5 nur quadratische Nichtreste mod. 5 darstellen; für Kategorie III ist daher entweder das Symbol $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide gleich -1.

Möge nämlich durch die Gleichung

$$Pw^2 + Qw + R = 0,$$

wo entweder das Symbol $\left(\frac{P}{5}\right)$ oder $\left(\frac{Q}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sind, ein Wert w definirt werden, der zu einer Wurzel einer Gleichung der II. Kategorie Veranlassung giebt. Es giebt dann noch 59 andere Werte w, die zu derselben Klasse gehören, und die zugehörigen quadratischen Formen haben nach der Theorie der Gattungen alle die Eigenschaft, daß entweder das $\left(\frac{P}{5}\right)$ oder $\left(\frac{Q}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sind. Die 60 Werte w verteilen sich nun aber doch zu je 5 auf die 12 gleichberechtigten Gleichungen; infolgedessen

muss gemäss unseren früheren Con-
gruenzen für die sämmtlichen gleich-
berechtigten Schemata der II. Kate-
gorie entweder das Symbol $\left(\frac{b_0}{5}\right)$
oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sein.
Ganz analoger gilt für die III.
Kategorie. Wir können daher unse-
re Tabelle von pag. 342 so vervoll-
ständigen:

$$n \equiv 1 \pmod 5$$

Schemata	Anz. zahl	g
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $\left(\frac{b_a}{5}\right)$ und $\left(\frac{c_a}{5}\right) = 0$	1	60
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $\left(\frac{b_a}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_a}{5}\right)$ oder beide $= +1$	12	5
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $\left(\frac{b_a}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_a}{5}\right)$ oder beide $= -1$	12	5

$$n \equiv 4 \pmod 5$$

$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ $\left(\frac{b_a}{5}\right)$ und $\left(\frac{c_a}{5}\right) = 0$	1	60
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ $\left(\frac{b_a}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_a}{5}\right)$ oder beide $= +1$	12	5
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ $\left(\frac{b_a}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_a}{5}\right)$ oder beide $= -1$	12	5

Wir haben jetzt noch kurz die Zahl der Nullpunkte in den 3 Fällen anzugeben. Wir teilen zu diesem Zwecke die zu $(-\nabla)$ gehörigen H' Klassen in die obigen 3 Kategorieen und bezeichnen deren Anzahlen mit H'_0, H'_{+1}, H'_{-1}, so daß also

H'_0 die Anzahl der Klassen ist, welche nur Vielfache von 5 darstellen,
H'_{+1} die Anzahl der Klassen ist, welche außer Vielfachen von 5 nur $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}$ mod. 5 darstellen,
H'_{-1} die Anzahl der Klassen ist, welche außer Vielfachen von 5 nur $\mathfrak{A}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{A}$ mod 5 darstellen.

Beachtet man noch, daß $H'_0(\nabla) = H'\left(\frac{\nabla}{25}\right)$ ist, so ist die Zahl der Wurzeln in den 3 Fällen offenbar

$$\left.\begin{array}{l} \text{I.}\ 60\,\Sigma H'\left(\frac{4n-t^2}{25}\right) \\ \text{II.}\ g\,\Sigma H'_{+1}(4n-t^2) \\ \text{III.}\ g\,\Sigma H'_{-1}(4n-t^2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} t \equiv \pm 2, \text{ wenn } n \equiv 1 \bmod 5 \\ t \equiv \pm 1, \quad " \quad n \equiv 4 \text{ ist} \end{array}$$

15. Diese Anzahlen sind alle bereits

seiner Zeit von Gierster bestimmt worden, der von ihnen aus zu den Classenzahlrelationen 5ter Stufe gelangt ist, wie man der Näheren in Modulf. Bd. II. Absch. IV, 6 nachlesen kann, wo auch die gesammte Literatur der Gegenstände zusammengestellt ist. Wir können hier aus Mangel an Zeit auf dieselben nicht näher eingehen.

Die obigen Formeln geben zugleich die Zahl der Wurzeln von $[f(y,y)]=0$ und, durch g dividirt, die Zahl der Wurzeln von $\Psi(r_g)=0$. Aber sie geben nicht nur die Zahl dieser Wurzeln, sondern auch deren Bedeutung im einzelnen, sie lassen die Structur der Gleichung $[f(y,y)]=0$ bez. $\Psi(r_g)=0$ erkennen.

Nachdem wir so einen Ueberblick über die Wurzeln der gereinigten Transformationsgleichungen gewonnen und gelernt haben, dieselben mit Hülfe der reducirten Formen (P, Q, R) sämmtlich zu berechnen, machen wir nun den Schritt von den Transforma-

tionsgleichungen zu den Klassengleichungen.

Wir bezeichnen als die zu einem Schema $\left|\begin{matrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right|$ gehörige Classengleichung fünfter Stufe der Discriminante $(-\nabla)$ diejenige Gleichung vom Grade h, welcher die zu den betreffenden primitiven Classen gehörigen Werte der r_g genügen. Wir schreiben diese Gleichung:

$$\chi_\nabla(r_g) = 0,$$

wobei zu beachten ist, dass eigentlich noch ein Schema hinzugesetzt werden müsste.

In den besonderen Fällen, wo nicht sämmtliche existirenden Classen in Betracht kommen, construiren wir die entsprechenden Teilclassengleichungen, die wir dann analog wie H' mit einem Zusatzindex $+1$ oder -1 versehen.

$$\chi_\nabla^{+1}(r_g) = 0, \chi_\nabla^{-1}(r_g) = 0.$$

Endlich setzen wir aus diesen χ' ebenso grössere Aggregate χ'' zusammen,

wie sich die $\mathfrak{H}'$ aus den h aufbauen:

$$\chi_{\nabla}(r_g) = \Pi_{\chi \frac{\nabla}{t^2}}(r_g).$$

Eventuell sind beiderseits die Zusatzindices zuzufügen. Wir erhalten dann, den Formeln vom § 13 und 14 entsprechend folgende Dekomposition der jedesmaligen $\Psi(r_g)$:

1. bei $n \equiv 2, 3 \pmod 5$, sowie bei $n \equiv 1$ für die Schemata $a_0 + d_0 = 0, \pm 1$ und bei $n \equiv 4$ für die Schemata $a_0 + d_0 = 0, \pm 2$:

$$\Psi(r_g) = \Pi \chi'_{4n-t^2}(r_g); \quad t \equiv \pm(a_0 + d_0);$$

2. bei $n \equiv 1, 4$ im Falle jeweils der ausgezeichneten Schemata:

$$\Psi(r_g) = \Pi \chi'_{\frac{4n-t^2}{25}}(r_g); \quad t \equiv \pm 2 \text{ resp. } \equiv \pm 1;$$

(Hier ist r_g einfach gleich f);

3. bei $n \equiv 1, 4$ für die anderen Schemata $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$, resp. ± 1:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{(r_g)} &= \Pi \chi'_{+1,\, 4n-t^2\,(r_g)} \\ \Psi_{(r_g)} &= \Pi \chi'_{-1\,\, 4n-t^2\,(r_g)} \end{aligned}\right\} t \equiv \pm 2 \text{ resp. } \pm 1.$$

16. Es hat nun keine Schwierigkeit, unsere Ψ in rationaler Weise in die einzelnen χ' und fernerhin in die einzelnen χ' zu spalten. Man beachte zu diesem Zwecke, daß die singulären j den Classengleichungen erster Stufe genügen und daß sich j jedesmal rational durch die in Betracht kommenden r_g darstellt.

Setzt man in $\chi_{\nabla}(j) = 0$ für j ein $R\frac{60}{g}(r_g)$, so erhält man das Product von Classengleichungen 5ter Stufe, die zu einer Kategorie gleichberechtigter Schemata gehören. In unseren obigen Formeln haben wir aber ganz andere Zusammenstellungen der Classengleichungen 5ter Stufe; aus beiden wird man daher die einzelne Classengleichung 5ter Stufe rational isoliren können.

Wir erfahren so, daß unsere Gleichungen:

$$X^{\nu}_{\Delta}(r_g) = 0 \quad \text{resp.} \quad X^{\nu+1}_{\Delta}(r_g) = 0\,, \quad X^{\nu-1}_{\Delta}(r_g) = 0$$

rationale Zahlenkoefficienten haben. „Rational" ist dabei natürlich (soferne die Specialuntersuchung der einzelnen Fälle es nicht als überflüssig erscheinen läßt) dahin zu verstehen, daß ε als adjungirt gilt.

Die Auflösung der Classengleichung ersten Stufe zieht natürlich die Auflösung unsere Classengleichungen 5ter Stufe unmittelbar nach sich. Wir können daher auch so sagen:

Man betrachte die Darstellung von j als rationale Function $\left(\frac{60}{g}\right)^{\text{ten}}$ Grades von r_g als eine algebraische Gleichung für r_g. Diese Gleichungen, welche sich kurzweg als Resolventen der Ikosaeder-Gleichung bezeichnen lassen, haben bei gegebenem singulären Werte von j nach Adjunction von diesem singulären Werte j

und von ε zum Rationalitätsbereich eine rationale Wurzel.

Wir führen kurz den Grund an, der darin liegt, daß die Gleichungen

$$\chi_{\nabla}(f) = 0 \quad \text{und} \quad f = R\,\frac{60}{g}(r_g)$$

bei singulärem j eine gemeinsame Wurzel haben. Auf nähere Erörterungen, ob diese Gleichungen eventuell mehr Wurzeln gemeinsam haben u. s. w., können wir uns nicht mehr einlassen.

Zum Schluß möchte ich noch folgende Bemerkung anfügen.

Schon seit 20 Jahren, nämlich seit der Zeit, als Gierster die Herleitung der Klassenzahlrelationen auf die höheren Stufen gelang, hege ich den lebhaften Wunsch, daß sich jemand allgemeiner die Theorie der singulären Moduln, insbesondere für die 5te Stufe durch führen möchte. Da in den Bemerkungen der letzten Stunden ein vollständiger Plan für diese

Untersuchung vorliegt, kann sie keine grossen Schwierigkeiten mehr machen.

Ich schliesse die Vorlesung mit der wiederholten Bitte an meine Zuhörer, dieses schöne und erfolgreiche Arbeitsthema zur Erledigung bringen zu wollen.

BINDING SECT. MAY 7 - 1968

QA
241
K57
1907

Klein, Felix
Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie 2, unveranderter Abdruck

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY